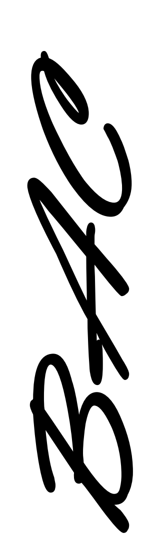
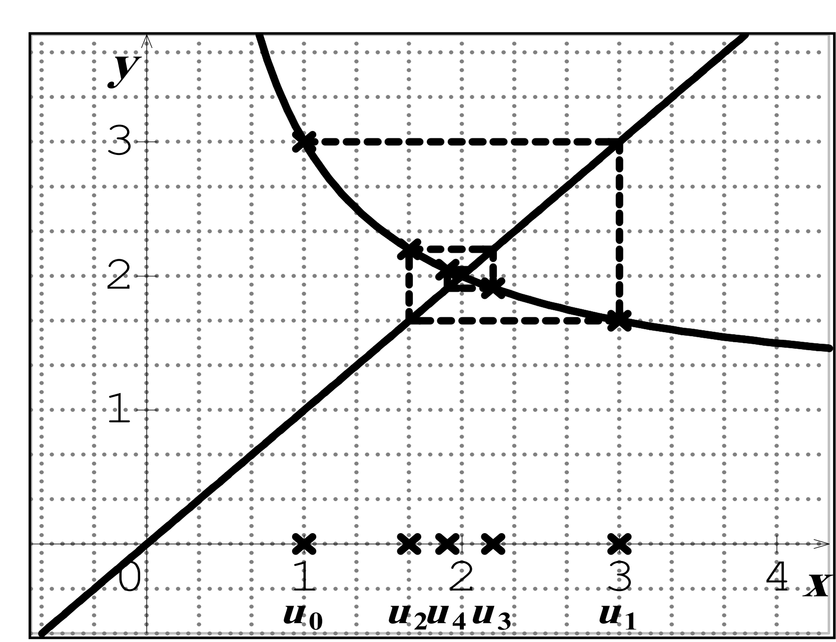
إلى جمهور طلبتنا الأعزاء مصدر تعلمنا المستمر

سلسلة حاقة

في المتتاليات العددية

- ملخص مفصل ومبسط
- تمارين هادفة بالحلول
- تمارين بكالوريا جزائرية وأخرى أجنبية





3 ثانوي AS

شعبة

رياضيات+تقني رياضي+علوم تجريبية

إعداد الأستاذ:

محمد حاقة

بسم الله الرحمان الرحيم

إهداء

-إلى الوالدين الكريمين حفظهما الله وكل أفراد أسرتي

-إلى كل من علمني حرفا في هذه الدنيا الفانية

-إلى جميع أفراد الأسرة التربوية في الجزائر وخارجها

-إلى كل من لم يدخر جهدا في مساعدتي

- إلى كل مجهول X هو حل لمعادلة النجاح في البكالوريا

إلى كل هؤلاء وهؤلاء أهدي هذا العمل المتواضع

وأسأل الله أنّ يجعله نبراسا لكل طالب علم

الأستاذ محمد حاقة

خريج المدرسة العليا للأساتذة

– القبة القديمة– الجزائر

دليـــل المتتاليـــات العدديـــة

قــف عنــد ناصيــة الحلــم وقاتــل

1) تعريـف: نسمي متتالية (u_n) كل دالة معرفة على $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$

✓ **مثـال**: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 2$ (متتالية معرفة بعبارة الحد العام)

نحسب الحدود الثلاث الأولى منها

$u_0 = 3\times 0 + 2 = 2$ ، $u_1 = 3\times 1 + 2 = 5$ ، $u_2 = 3\times 2 + 2 = 8$

✓ **ملاحظـة**: تسمى الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$

بـ: $f(x) = 3x + 2$ بالدالة المرفقة بالمتتالية (u_n)

2) طـرق دراسـة اتجاه تغيـر متتاليـة

✓ **الطريقـة الأولـى**: نحسب الفرق التالي $u_{n+1} - u_n$ فإذا كان

الإشارة	اتجاه التغير
$u_{n+1} - u_n > 0$	(u_n) متزايدة تماما
$u_{n+1} - u_n < 0$	(u_n) متناقصة تماما
$u_{n+1} - u_n = 0$	(u_n) ثابتــة

✓ **مثـال** : نأخذ المثال السابق $u_n = 3n + 2$ ، أولا

نحسب u_{n+1}: $u_{n+1} = 3(n+1) + 2 = 3n + 5$ ومنه

$u_{n+1} - u_n = 3 > 0$ ، نستنتج أنّ (u_n) متزايدة تماما

✓ **الطريقـة الثانيـة**: هذه الطريقة يشترط فيها المتتالية (u_n) كل

حدودها موجبة تماما ،نحسب النسبة التالية $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ فإذا كانت

النسبة	اتجاه التغير
$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$	(u_n) متزايدة تماما
$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$	(u_n) متناقصة تماما
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$	(u_n) ثابتــة

✓ **الطريقـة الثالثـة** : إذا كانت الدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) متزايدة

، فانه يمكن معرفة اتجاه تغير (u_n) من إشارة الفرق بين الحدين u_0

و u_1 ، إذا كان

الإشارة	اتجاه التغير
$u_1 - u_0 > 0$	(u_n) متزايدة تماما
$u_1 - u_0 < 0$	(u_n) متناقصة تماما
$u_1 - u_0 = 0$	(u_n) ثابتــة

3) المتتاليات المحدودة

أ/ (u_n) محدودة من **الأسفل** معناه $u_n \geq A$ مهما كان n من $\mathbb{N}$ حيث $(A \in \mathbb{R})$

ب/ (u_n) محدودة من **الأعلى** معناه $u_n \leq B$ مهما كان n من $\mathbb{N}$ حيث $(B \in \mathbb{R})$

ج/ (u_n) محدودة معناه محدودة من الأسفل ومن الأعلى أي $A \leq u_n \leq B$

4) البرهان(الاستدلال) بالتراجع: يستخدم لإثبات صحة خاصية $P(n)$ **تتعلق بالأعداد الطبيعية**

لهذا النوع من البرهان خطوتين هما

أولا: التأكد من صحة الخاصية $P(n)$ من أجل n_0 حيث n_0 رتبة ابتدائية (**في الغالب** تكون $n_0 = 0$)

ثانيا: نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ (**الخاصية الوراثية**)

ملاحظتين:

أ/ تسمى $P(n)$ في البرهان فرضية التراجع   ب/ من بين استعمالات البرهان بالتراجع إثبات أن متتالية محدودة

5) تقارب وتباعد متتالية

☒ إذا كانت $\lim u_n = l$ حيث: $l \in \mathbb{R}$ فان (u_n) متقاربة

☒ وإذا كانت $\lim u_n = +\infty$ أو $\lim u_n = -\infty$ أو $\lim u_n$ غير موجودة فان (u_n) متباعدة

✓ **نتيجة: نظرية أخرى لمعرفة تقارب متتالية**

أ/ إذا كانت (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فان (u_n) متقاربة

ب/ إذا كانت (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فان (u_n) متقاربة

6) حساب نهاية متتالية : هناك طريقتين

أولا: $u_n = f(n)$ (عبارة الحد العام) تحسب النهاية باستخدام قواعد الدوال المعروفة

ثانيا: $u_{n+1} = f(u_n)$ (علاقة تراجعية) فإذا كانت (u_n) متقاربة فإننا نحل المعادلة $f(l) = l$

ملاحظة: في بعض التمارين المعادلة $f(l) = l$ تقبل أكثر من حل وبالتالي علينا رفض كل الحلول عدا واحد فقط

ويكون سبب الرفض إما المجال الذي تنتمي إليه حدود المتتالية (المحدودية) أو اتجاه تغيرها

7) المتتاليتان المتجاورتين: نقول عن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتين إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة

و $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

ملحوظة: المتتاليتان المتجاورتين متقاربتان و $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$

المتتالية	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريفها	المتتالية (u_n) حسابية أساسها r يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + r$	المتتالية (u_n) هندسية أساسها q يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n \times q$
عبارة الحد العام (u_n بدلالة n) — إذا كان الحد الأول u_0	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
عبارة الحد العام (u_n بدلالة n) — إذا كان الحد الأول u_1	$u_n = u_1 + (n-1)r$	$u_n = u_1 \times q^{n-1}$
العلاقة بين حدين (u_p و u_n)	$u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
رتبة حد إذا كان الحد الأول u_0	رتبة الحد = دليل الحد+1	
رتبة حد إذا كان الحد الأول u_1	رتبة الحد = دليل الحد	
a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من المتتالية	$2b = a + c$ b الوسط الحسابي للعددين a و c	$b^2 = a \times c$ b الوسط الهندسي للعددين a و c
مج حدود متتابعة للمتتالية	$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$	$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 . \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
	$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$	$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p . \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
اتجاه تغير (u_n)	إذا كان $r = 0$ فإن (u_n) ثابتة. إذا كان $r > 0$ فإن (u_n) متزايدة تماما. إذا كان $r < 0$ فإن (u_n) متناقصة تماما.	إذا كان $q = 1$ فإن (u_n) ثابتة أي $u_{n+1} = u_n$ من أجل $q > 0$ و $q \neq 1$: إذا كان $u_0 \times (q-1) > 0$ فإن (u_n) متزايدة تماما. إذا كان $u_0 \times (q-1) < 0$ فإن (u_n) متناقصة تماما. إذا كان $q < 0$ فإن (u_n) ليست رتيبة

8) بعض النتائج والخواص الهامة

1) $$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & ;-1<q<1 \\ +\infty & ;q>1 \\ \text{غ- م} & ;q\leq -1 \end{cases}$$

2) (u_n) و (v_n) متتاليتان هندسيتين أساسهما q_1 و q_2 على الترتيب وحداهما u_0 و v_0 و $(v_n \neq 0)$

- $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{q_2}$ وحدّها الأول $\dfrac{1}{v_0}$
- $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{q_1}{q_2}$ وحدّها الأول $\dfrac{u_0}{v_0}$
- $(u_n v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q_1.q_2$ وحدّها الأول $u_0.v_0$

3) الإنتقال من متتالية حسابية إلى الهندسية والعكس

👍 إذا كانت (u_n) متتالية هندسية (موجبة تماما) أساسها q ، فان $(\ln(u_n))$ متتالية حسابية أساسها $r=\ln q$

👍 إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r ، فان (e^{u_n}) متتالية هندسية أساسها $q=e^r$

4) a عدد حقيقي غير معدوم

أ/ $a+a+...+a=a(n+1)$ حيث a مكررة $n+1$ مرة

ب/ $a\times a\times...\times a=a^{n+1}$ حيث a مكررة $n+1$ مرة

ج/ $a^0\times a^1\times a^2...\times a^n=a^{0+1+2+...+n}=a^{\frac{n(n+1)}{2}}$

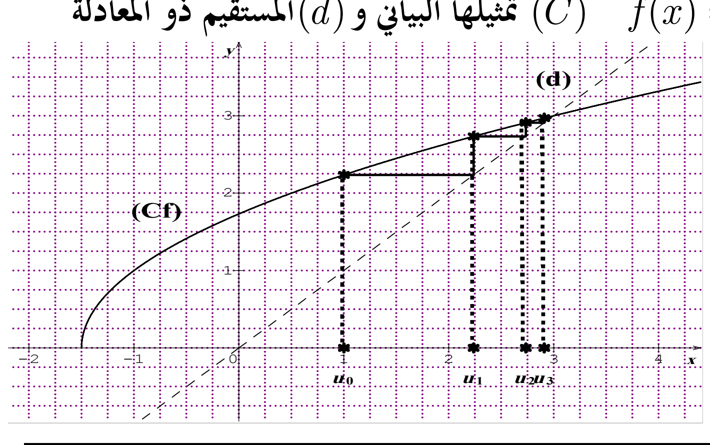
9) تمثيل حدود متتالية على محور الفواصل: لتوضيح ذلك نأخذ تطبيق

تطبيق : (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $\left]-\dfrac{3}{2},+\infty\right[$ كما يلي $f(x)=\sqrt{2x+3}$ (C) تمثيلها البياني و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (أنظر الشكل المقابل)

المطلوب: مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

(دون حسابها موضحا خطوط الرسم)



التمرين الأول

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = \frac{1}{4}$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$ و $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$

1) أ/ برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n < 1$

ب/ بين أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2) أ/ بين أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{5}{2}$ ثم عبر عن حدّها العام وحدّها v_n بدلالة n

ب/ أثبت أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ثم استنتج النهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$



التمرين الثاني

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

f الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x - 16}{x + 11}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

I. تحقّق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ ثم بيّن أنّ: من أجل كل $x \in [-4;1]$ فانّ $f(x) \in [-4;1]$

II. (u_n) متتالية معرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$

1) أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

2) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $-4 < u_n \leq 0$ ثم بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $q = \frac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع S حيث

$$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \ldots + v_{2016} \times u_{2016}$$

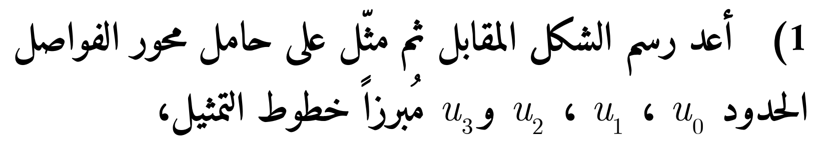
التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$. (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$



(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=-1$

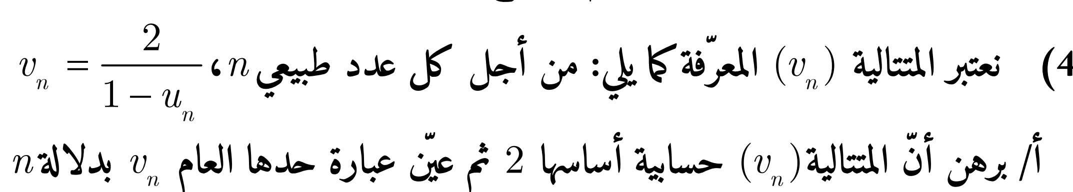
ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$



1) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزاً خطوط التمثيل، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

2) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n<1$

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنّها متقاربة



4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\dfrac{2}{1-u_n}$

أ/ برهن أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 ثم عيّن عبارة حدها العام v_n بدلالة n

ب/ استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=1$، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=7u_n+8$

1) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $3u_n=7^{n+1}-4$

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=1+7+7^2+\ldots+7^n$ و $S'_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$

أ/ احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S_n و S'_n

ب/ استنتج أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $18\times S'_n=7^{n+2}-24n-31$

3) أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5

ب/ عيّن قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5

التمرين الخامس

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{3}{4}u_n+1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0=6 \\ v_{n+1}=\dfrac{3}{4}v_n+1 \end{cases}$$

1) احسب الحدّين: u_1 و v_1

2) أ/ أكتب $u_{n+2}-u_{n+1}$ بدلالة u_n-u_{n+1}

ب/ باستعمال البرهان بالتراجع برهن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n=u_n-v_n$

برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأوّل w_0 ثم عبّر عن w_n بدلالة n .

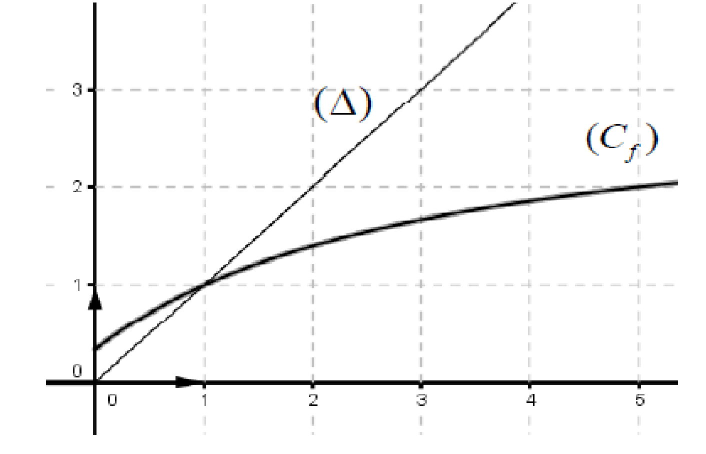
4) بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان

التمرين السادس

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$

α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول u_0 حيث $u_0=\alpha$

ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$



I. عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II. نضع في كل ما يلي $\alpha=5$

1) أ/ أنقل الشكل المقابل ثم مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حساب الحدود)

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

أ/ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأوّل

ب/ عبر بدلالة n عن u_n و v_n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_n+v_{n+1}+\ldots+v_{n+2016}$

ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n=\dfrac{1}{u_n+1}+\dfrac{1}{u_{n+1}+1}+\dfrac{1}{u_{n+2}+1}+\ldots+\dfrac{1}{u_{n+2016}+1}$

التمرين السابع

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ : $u_1 = \frac{1}{a}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \frac{n+1}{an} u_n$

حيث a عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 2 .

1) أ/ بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n > 0$.

ب/ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_n = \frac{1}{an} u_n$

أ/ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{a}$ وعيّن حدّها الأوّل v_1 بدلالة a

ب/ جد بدلالة n و a عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n واحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

3) احسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + ... + \frac{1}{n}u_n$

ثم عيّن قيمة a حيث $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{2016}$

التمرين الثامن

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [0;4]$ كما يلي : $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$

1) أ/ بيّـــن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال I

ب/ بيّـــــن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ تنتمي إلى I

2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول: $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le 4$

ب/ استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج أنها متقاربة

3) بيّـــن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \neq 0$

4) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$

أ/ برهن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0

ب/ أكتب v_n بدلالة n

ج/ استنتج أن: $u_n = \frac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين التاسع

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية بحدّها الأول: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

بـ : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$ ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

1) بيّــن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0

2) أ/ عبر بدلالة n عن عبارة الحد العام v_n

ب/ استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

ج/ احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) أ/ احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

ب/تحقق أن: $\frac{1}{3}(1 - v_n) = \frac{1}{u_n + 2}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n

ج/ استنتج بدلالة n المجموع: $S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \ldots + \frac{1}{u_n + 2}$

التمرين العاشر

I. f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{2x+8}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) أ/ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2) عيّن احداثيي نقطة تقاطع (C) مع المستقيم (Δ) الذي $y = x$ معادلة له

3) ارسم (C) و (Δ)

II. (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بــ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1) مثل في الشكل السابق على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها) موضحاً خطوط الإنشاء

2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

3) أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n < 4$

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $4-u_{n+1} \le \frac{1}{2^n}(4-u_0)$

د/ استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الحادي عشر

I. f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{5x}{x+2}$

1) أ/ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x)\ge 0$

II. (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{5u_n}{u_n+2}$

1) أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1\le u_n \le 3$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنّها متقاربة

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 1-\frac{3}{u_n}$

أ/ برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب حساب حدّها الأول v_0

ب/ اكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

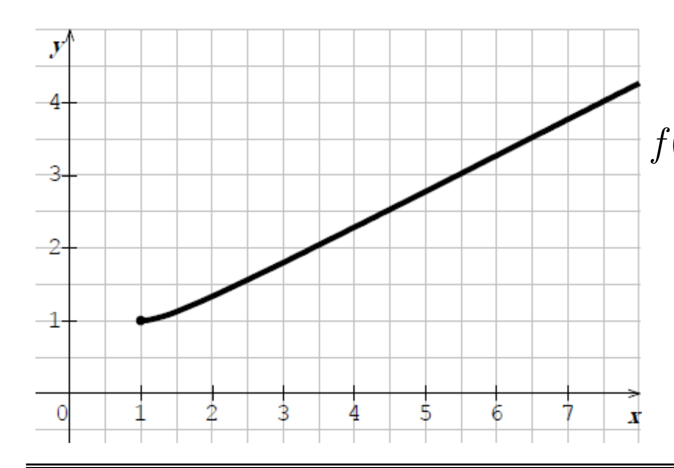
ج/ احسب نهاية المتتالية (u_n)

3) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\ldots+\frac{1}{u_n}$

التمرين الثاني عشر

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، (الشكل المقابل)



1) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ

$u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ/ أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى

للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحاً خطوط الإنشاء.

ب/ أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

ج/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$

د/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ه/ برر تقارب المتتالية (u_n)

3) نعتبر المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

أ/ برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدّها الأوّل

ب/ أكتب w_n بدلالة n ثم v_n بدلالة n

ج/ بيّن أنّ : $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$، ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

د/ احسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \ldots + \frac{1}{w_n}$

التمرين الثالث عشر

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$

1) أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $1 + u_n > 0$

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة . هل هي متقاربة ؟ علّل.

2) نضع من أجل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$

أ/ أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل

ب/ اكتب v_n ثم u_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

ج/ بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \ldots + \ln v_n = (n+1)(-n + 2 + \ln 3)$

التمرين الرابع عشر

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

I. f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) عيّن اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$

3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$

II. نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=5\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$

1) أ/ أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 ؛ v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 دون حسابها.

ب/ خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

2) أ/ أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2\le u_n<\alpha$ و $\alpha<v_n\le 5$ حيث: $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

3) أ/ أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{3}(v_n-u_n)$

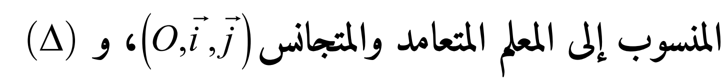
ب/بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0<v_n-u_n\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

ج/ استنتج أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ ، ثم حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n)

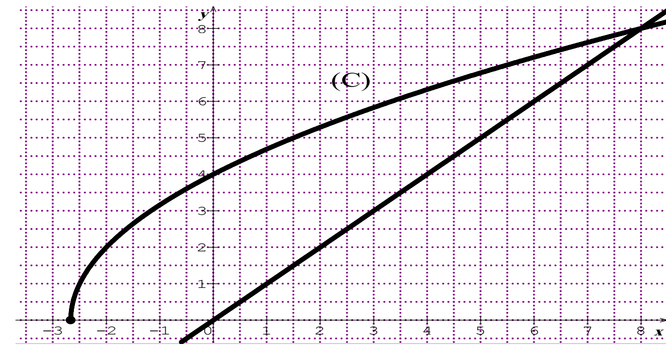
التمرين الخامس عشر

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{6u_n+16}$

1) h الدالة المعرّفة على المجال $\left[-\dfrac{8}{3};+\infty\right[$ بـما يلي : $h(x)=\sqrt{6x+16}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي



المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، و (Δ)



2) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (الشكل المقابل)

أ/ أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثّل حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

(دون حسابها وموضحاً خطوط الإنشاء) (Δ)

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها

3) أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0 \le u_n < 8$$

ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$

ج/ استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

4) أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < 8 - u_{n+1} \le \dfrac{1}{2}(8-u_n)$

ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < 8 - u_n \le 8\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين السادس عشر

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - \dfrac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_n + 4$

1) بين أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

2) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = 5\left(\dfrac{1}{v_n+5} - 1\right)$

أ/ بين أنّ المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ب/ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$

التمرين السابع عشر

I. نعتبر المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) بين أنّ (u_n) متتالية هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

II. نضع، من أجل كل عدد طبيعي n؛ $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري)

1) عبر عن v_n بدلالة n، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n)

2) أ/ أحسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n)$

ب/ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$

التمرين الثامن عشر

I. f هي الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x) = x - \ln(x-1)$

1) حدد حسب قيم x، إشارة $f(x) - x$

2) أ/ عيّن اتجاه تغيّر f

ب/ بين أنه إذا كان $x \in [2;e+1]$ فان $f(x) \in [2;e+1]$

II. (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = e+1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ؛ $u_n \in [2;e+1]$

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) برر تقارب المتتالية (u_n)، ثم أحسب نهايتها

التمرين التاسع عشر

لتكن المتتالية (u_n) والمتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي: $u_0 = 3$ ، $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1) أحسب u_1 ، v_1 و u_2 ، v_2

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = v_n - u_n$ و $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

أ/ بين أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب/ عبر عن v_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} w_n$

3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان

4) بين أن المتتالية (t_n) ثابتة، ثم أحسب نهايتها

5) استنتج نهاية المتتالية (u_n) و (v_n)

التمرين العشرون

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$

1) أحسب u_2، u_3 و u_4

2) أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم؛ $u_n > 0$

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ؟

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $v_n = \frac{u_n}{n}$

أ/ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

ب/ عبر عن v_n بدلالة n، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $v_n = \frac{n}{2^n}$

4) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - x\ln 2$

- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الواحد والعشرون

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3n - 1$

1) أ/ احسب u_1 ، u_2 و u_3، ثم برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$، $u_n > 0$

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$، $u_n > 3n - 4$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

2) نعرف المتتالية (v_n) بـ: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 9n + 30$

أ/ برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 9\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^n + n\right] - 30$

1) نعتبر المتتالية الحسابية (w_n) ذات الأساس 9 وحدها الأول $w_0 = -30$

- احسب بدلالة n المجموع $L_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$ ثم استنتج المجموع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمرين الثاني والعشرون

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_1 = \sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1) أحسب؛ u_2 و u_3، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $u_n \leq n+3$

ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n)

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = u_n - n$

أ/ بين أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

ب/ عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)v_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 v_1 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n v_n \quad \text{و} \quad S'_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \quad \text{و} \quad T_n = \frac{S'_n}{n^2}$$

- أحسب المجموعين S_n و S'_n بدلالة n ، ثم عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

التمرين الثالث والعشرون

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 6$ ومن اجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 4$

2) بين أنّ (u_n) متناقصة . ماذا تستنتج ؟

3) بين أنّ النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق: $l = \frac{1}{4}l + 3$ ، ثم استنتج قيمة l

4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = \ln(u_n - 4)$

أ/ برهن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب/ عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

ج/ عين اصغر عدد طبيعي الذي يحقق: $u_n < 4 + 2\times10^{-4}$

د/ أحسب بدلالة n المجموعين: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

التمرين الرابع والعشرون

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 4$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{4u_n + 1}{u_n + 4}$

1) أحسب u_1 و u_2

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج؟

4) (v_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ/ بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول

ب/ أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n

ج/ استنتج أن : $u_n = \frac{5^{n+1} + 3^{n+1}}{5^{n+1} - 3^{n+1}}$ ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

د/ أحسب كلا من : $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \ldots + v_n^2$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

التمرين الخامس والعشرون

(v_n) متتالية هندسية كل حدودها موجبة تماما حدّها الأول v_0 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} v_0 - 4v_2 = \frac{-5}{3} \\ v_0 . v_1 . v_2 = 1 \end{cases}$$

1) أ/ أحسب v_1 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول

ب/ أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n

ج/ أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$، ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = \frac{7}{3}$

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_0 = -\frac{2}{3}$ و: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2}$

أ/ أحسب u_1 و u_2

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان؛ $u_n > -2$

ج/ عين اتجاه تغير (u_n) ، ماذا تستنتج ؟

3) (w_n) المتتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = u_n - v_n$

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) ثابتة ، ثم عين w_n

ب/ استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

4) أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث: $T_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \ldots + \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}$

التمرين السادس والعشرون

لتكن المتتالية العدديّة (u_n) المعرّفة بـ : $u_0 = \alpha$ و $2u_{n+1} = 3u_n^2$ ؛ حيث α عدد حقيقي موجب تماما

I. عيّن قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

II. في كلّ ما سيأتي، نفرض أنّ $\alpha \neq \frac{2}{3}$

1) نعرّف، على $\mathbb{N}$، المتتالية العدديّة (v_n) كما يلي: $v_n = \ln u_n + \ln\frac{3}{2}$

أ/ أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسيّة يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل v_0 بدلالة α

ب/ اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n و α

ج/ بيّن، من أجل كل عدد طبيعي n، أنّ: $u_n = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\alpha\right)^{2^n}$

د/ عيّن مجموعة قيم α حتى تكون (u_n) متقاربة

2) نعرّف، على $\mathbb{N}$، المتتالية العدديّة (t_n) حيث: $t_0 = \frac{3}{2}$ و $t_{n+1} = 2t_n + v_n$

و لتكن المتتالية العدديّة (w_n) المعرّفة كما يلي: $w_n . v_n = t_n$

أ/ برهن أنّ (w_n) متتالية حسابيّة يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل w_0

ب/ اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n، و استنتج عبارة t_n بدلالة n

التمرين السابع والعشرون

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3}{2}\left[1 - \frac{1}{1+2u_n}\right]$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0 < u_n < 1$

2) أ/ تحقق أن: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها

3) نعرف المتتالية (v_n) بـــ: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \frac{1-u_n}{2u_n}$

أ/ برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل

ب/ أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n، ثم احسب من جديد نهاية المتتالية (u_n)

4) احسب بدلالة n المجموعين $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ و $T_n = u_0 + 3u_1 + 9u_2 + \dots + 3^n u_n$

التمرين الثامن والعشرون

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأول u_1 وأساسها q حيث: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1.u_2.u_3 = 216 \end{cases}$

1) أ/ أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول

ب/ أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

ج/ أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$، ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = 728$

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_1 = 2$ و: $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ/ أحسب v_2 و v_3

ب/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

- بين أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
- أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n

التمرين التاسع والعشرون

(u_n) المتتالية المعرّفة بـ : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع أنّ (v_n) ثابتة، استنتج عبارة u_n بدلالة n
- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3) (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = w_1 + w_2 + ... + w_n$

التمرين الثلاثون

1) f دالة معرفة على $I = [1;2]$ كما يلي : $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

أ/ أثبت أن الدالة f متزايدة تمامًا على I

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من I فان $f(x)$ ينتمي إلى I

2) نعرّف المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{3}{2}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$

أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : u_n ينتمي إلى I

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج تقاربها

3) أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

ب/ أحسب نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الواحد والثلاثون

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $u_0=-1$ ، $u_1=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$

1) أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسيّة يطلب تعيين أساسها، وحدّها الأول v_0

2) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n

3) احسب ، بدلالة n ، المجموع : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n=\dfrac{u_n}{v_n}$

أ/ احسب w_0 ، ثم بيّن أنّ (w_n) متتالية حسابيّة يطلب تعيين أساسها.

ب/ اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n، ثم عيّن أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $e^{w_n}>2020$

التمرين الثاني والثلاثون

(u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=4e^3$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=2\sqrt{u_n}$

1) أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_n>4$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ماذا تستنتج ؟

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n=\ln u_n-2\ln 2$

أ/ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب/ أكتب v_n بدلالة n ثم بين أن ؛ $u_n=4e^{\frac{3}{2^n}}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

ج/ عين العدد الطبيعي n الذي يحقق: $v_0 + v_1 + ... + v_n = 6\left(1 - e^{-2021\ln 2}\right)$

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_n^2$

التمرين الثالث والثلاثون

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول: $u_0 = \frac{13}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $3 < u_n < 4$

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$، واستنتج أنّ (u_n) متزايدة تماما

3) برر لماذا (u_n) متقاربة

4) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$

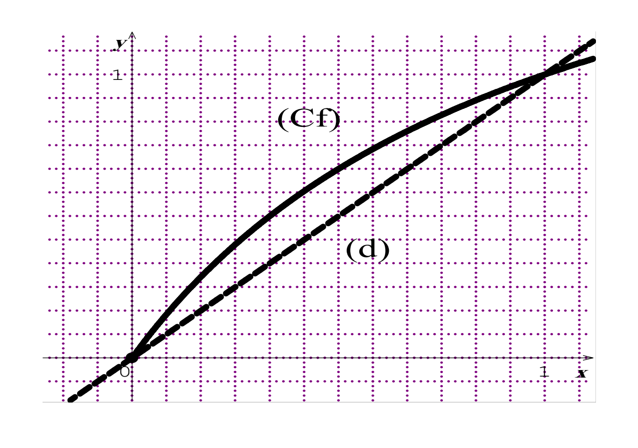
أ/ بين أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

ب/ عبّر عن v_n ثم u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

ج/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times ... \times (u_n - 3)$

- أكتب P_n بدلالة n، ثم بيّن أنّ $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$

التمرين الرابع والثلاثون



في الشكل المقابل (C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على

المجال $[0;1]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$

ومن أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = f(u_n)$

أ/ أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل

دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

2) أ/ أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0 \leq u_n \leq 1$

ج/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$

أ/ برهن أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها $\dfrac{1}{2}$ ،يطلب حساب حدّها الأول v_0

ب/ أحسب نهاية (u_n)

التمرين الخامس والثلاثون

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

1) أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 6$

ب/ استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ماذا تستنتج؟ ج/ أحسب نهاية المتتالية (u_n)

2) أ/ بين أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

ب/ أكتب v_n بدلالة n ، واستنتج u_n بدلالة n

ج/ أحسب بدلالة n المجموعين : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ و $T_n = v_0 + 3v_1 + 3^2 v_2 + \ldots + 3^n v_n$

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بـ : $w_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)w_{n-1} + \dfrac{1}{n}$

أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_{n+1} + w_{n-1} = 2w_n$

ب/ استنتج أن المتتالية (w_n) حسابية ج/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2n + 1$

التمرين السادس والثلاثون

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 3$ و $u_1 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+2} = \dfrac{5}{4}u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$

ولتكن المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$ و $w_n = u_n - 7$

1) أ/ برهن أن (v_n) متتالية ثابتة

ب/ استنتج أنّ، من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + 21)$

2) أ/ برهن بالتراجع أنّ، من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n < u_{n+1} < 7$

ب/ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، واستنتج نهايتها

3) أثبت أنّ (w_n) متتالية هندسيّة يطلب تعيين أساسها، وحدّها الأول

4) أ/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

ب/أحسب مرة أخرى نهاية المتتالية (u_n)

التمرين السابع والثلاثون

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$

نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عددان حقيقيان

1) عيّن العددين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية، يطلب حساب أساسها وحدّها الأول

2) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n

3) احسب بدلالة n المجموعين $S = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمرين الثامن والثلاثون

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{1}{4}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2}$

1) أحسب u_1 و u_2

2) أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n \le \frac{1}{4}$

ب/ بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنّها متقاربة

3) أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \le \frac{3}{4}u_n$

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \le \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ج/ احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين التاسع والثلاثون (يترك حله في المراجعة النهائية في نهاية السنة)

(u_n) المتتالية المعرفة العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_{n+1} = \int_n^{n+1} e^{2-x}dx$

1) أحسب u_0 ، ثم أثبت مستعملا مبدأ الاستدلال بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$

2) أكتب u_n بدلالة n ، ثم أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

3) أكتب بدلالة n الفرق $u_{n+1} - u_n$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

4) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها

5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الأربعون

1) نعرّف المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n + 3}$

أ/ عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = a + \dfrac{b}{2u_n + 3}$

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 1$

ج/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

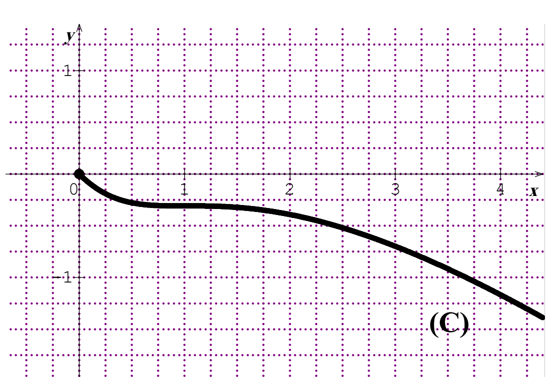
2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$

أ/ برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ب/ عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

3) نعتبر المجموعين S_n و π_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $\pi_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}$

أكتب S_n بدلالة n ، ثم بيّن أن $\pi_n = n + 1 - S_n$

التمرين الواحد والأربعون



المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني، في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ للدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = -x + \ln(1+x^2)$

(C) يقطع محور الفواصل عند المبدأ "o" فقط

1) بقراءة بيانية، برر أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $\ln(1+x^2) \le x$

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = \dfrac{3}{2}$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(1+u_n^2)$

أ/ بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 0$ و $u_{n+1} \le \dfrac{1}{2}u_n$

ب/ استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n \le \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ واستنتج أيضا أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها

3) لتكن المتتالية (S_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

أ/ بين أن المتتالية (S_n) متزايدة تماما

ب/ بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $S_n \leq 3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ واستنتج أنها متقاربة

التمرين الثاني والأربعون

1) f دالة معرفة على $I=[1;3]$ كما يلي : $f(x)=\frac{5x-3}{x+1}$

أ/ أثبت أن الدالة f متزايدة تمامًا على I

ب/ برهن أنه إذا كان $x \in I$ فان $f(x) \in I$

2) نعرف المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$

أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n<3$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ؟

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n=\frac{u_n-3}{u_n-1}$

أ/ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب/ عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n=1+\frac{2}{2^{-n}+1}$ ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $T_n=v_0u_0+v_1u_1+...+v_nu_n$

التمرين الثالث والأربعون

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_{n+1}=\frac{u_n-1}{u_n+3}$

1) أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $u_n>-1$

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

ج/ استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$

أ/ بين أنّ (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

ب/ عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

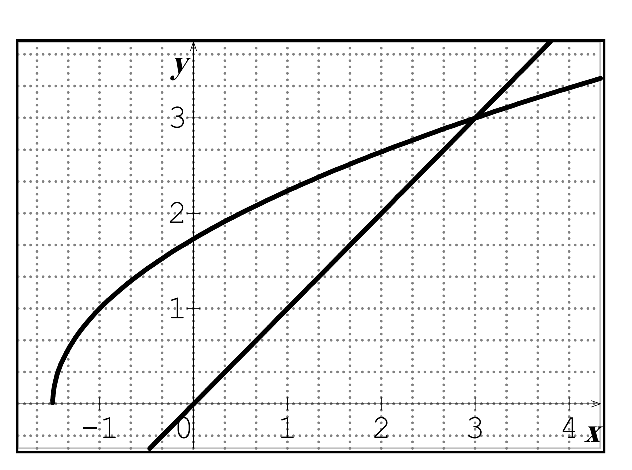
3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

التمرين الرابع والأربعون

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي $h(x) = \sqrt{2x+3}$


(C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$ في



المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (أنظر الشكل المقابل)

أ/ مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

(دون حسابها موضحا خطوط الرسم)

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

3) أ/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ب/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الخامس والأربعون

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = \frac{7u_n + 2}{u_n + 8}$

1) عين قيم α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) ثابتة

نفرض أنّ $u_0 = 0$ ، أحسب u_1 ، u_2

- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 8}$

ج/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $0 \le u_n \le 1$ ، ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}$

أ/ بين أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

ب/ عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية (u_n)

3) أحسب كلا من S_n و π_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

التمرين السادس والأربعون

(v_n) متتالية هندسية كل حدودها موجبة تماما حدّها الأول v_1 وأساسها q حيث: $\begin{cases} \ln v_3 + \ln v_7 = 8 + 2\ln 2 \\ \ln v_2 - \ln v_6 = -4 \end{cases}$

1) أحسب v_1 والأساس q لهذه المتتالية ، ثم أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n

2) أحسب الجداء P_n حيث: $P_n = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$

3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \ln v_n + \ln v_{n+1}$

أ/ بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها ب/ عبر عن u_n بدلالة n

4) هل العدد $4\ln 2 + 3$ حد من حدود المتتالية (u_n)

التمرين السابع والأربعون

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$

المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) أحسب v_0 و v_1

2) بيّـن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

3) أ/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$

ج/ بيّـن أن (u_n) متقاربة

التمرين الثامن والأربعون

I. المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

1) بين أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأوّل

2) احسب $\lim_{n \to +\infty} v_n$

II. المتتالية (u_n) معرّفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $1 \le u_n \le 6$

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) أ/ برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $6-u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6-u_n)$

ب/ بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \leq 6-u_n \leq v_n$. استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين التاسع والأربعون

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}$.

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثمّ أحسب حدّها الأوّل

2) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

3) احسب بدلالة n المجموع S_n ،حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

4) احسب بدلالة n الجداء P_n ،حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$ ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} P_n$

التمرين الخمسون

I- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^{2x}}{2e^{2x} - 2e^x + 1}$ (C_f) منحناها البياني

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = \frac{2e^{2x}(1-e^x)}{(2e^{2x} - 2e^x + 1)^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) أنشئ (C_f) (نعطي: $\ln 2 \approx 0,7$)

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = m^2$

I. تعتبر المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = \frac{3}{4}$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(\ln(u_n))$

1) أ/ بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)^2 + 1}$ ب/ أحسب u_1 و u_2

2) أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{1}{2} < u_n < 1$

ب/أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ماذا تستنتج ؟

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = \ln\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$

أ/ برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب/ عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ج/ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + \dots + v_n)$

التمرين الواحد والخمسون

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -2$

ب) بيّن أنّ (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

ـ أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

3) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ، و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3}\left(1 - n^2\right)$

التمرين الثاني والخمسون

f الدالة العددية المعرّفة والمتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x}{e.x+1}$ (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{5}{4e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{e}$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n(\frac{1}{e} - u_n)}{e.u_n + 1}$ ،

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برّر أنّها متقاربة.

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = \frac{e.u_n}{e.u_n - 1}$

أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 و عبارة v_n بدلالة n.

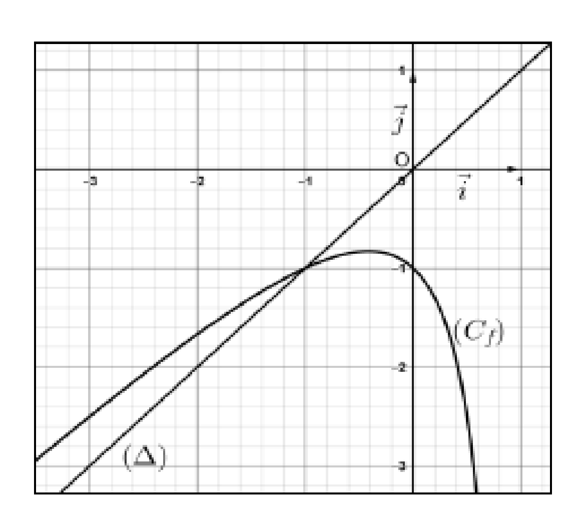
3) أ) تحقق أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1}$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots + v_n$.

4) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7.

التمرين الثالث والخمسون



f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=-3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (أنظر الشكل المقابل).

1) أعد رسم الشكل على ورقة الاجابة ثم مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل، أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3\leqslant u_n<-1$.

3) أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}+1\geqslant\frac{3}{4}(u_n+1)$.

ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n+1\geqslant-2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) نضع $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leqslant(u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1)<0$

واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

التمرين الرابع والخمسون

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

1) احسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=2n+1$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $e^{u_n}=v_n$.

ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) احسب المجموعين S_n و T حيث:

$$T=e^{u_{1439}}+e^{u_{1440}}+\ldots+e^{u_{2018}} \quad \text{و} \quad S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

التمرين الخامس والخمسون

f الدّالة المعرّفة على المجال $]4\,;7[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+2}+4$.

1) أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]4\,;7[$.

ب) استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4\,;7[$ فإنّ $f(x)\in]4\,;7[$.

2) برهن أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4\,;7[$ فإنّ $f(x)-x=\dfrac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$.

ثمّ استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4\,;7[$ فإنّ $f(x)-x>0$

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=4$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتّراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n $4\le u_n<7$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ بيّن أنّها متقاربة.

4) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n $7-u_{n+1}<\frac{1}{4}(7-u_n)$.

ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n $0<7-u_n<3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثمّ احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين السادس والخمسون

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$

1) أ) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>1$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-1)$.

أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

3) اكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1+\frac{12}{5^n}$ واحسب عندئذ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) بيّن أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0-1)(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=\left(\dfrac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

جـــــزء

الحلـــــول

النموذجية

التمرين الأول

1) أ/ البرهان بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n < 1$

نضع: $P(n) : 0 < u_n < 1$،

- نتأكد من صحة $P(0)$ (أي من أجل $n = 0$): لدينا $u_0 = \frac{1}{4}$ أي $0 < u_0 < 1$ محققة

- نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي $0 < u_n < 1$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي $0 < u_{n+1} < 1$

لدينا

$$0 < u_n < 1 \Rightarrow 4 < u_n + 4 < 5 \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{u_n + 4} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2 < \frac{10}{u_n + 4} < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{2} < \frac{-10}{u_n + 4} < -2$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{5}{2} < \underbrace{3 - \frac{10}{u_n + 4}}_{u_{n+1}} < 3 - 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < u_{n+1} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < u_{n+1} < 1 \Rightarrow \boxed{0 < u_{n+1} < 1}$$

ومنه الخاصية $P(n) : 0 < u_n < 1$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

ب/ تبيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما

نبيّن أنّ $u_{n+1} - u_n > 0$:

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - u_n = \frac{3(u_n + 4)}{u_n + 4} - \frac{10}{u_n + 4} - \frac{u_n(u_n + 4)}{u_n + 4}$$

$$= \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}$$

$$= \frac{-\left[\overbrace{(u_n - 1)}^{-}\overbrace{(u_n + 2)}^{+}\right]}{\underbrace{u_n + 4}_{+}} > 0$$

مما سبق $0 < u_n < 1$ ومنه $-1 < u_n - 1 < 0$ ، وأيضا $2 < u_n + 2 < 3$ وأيضا $4 < u_n + 4 < 5$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

- استنتاج أنها متقاربة: بما أن المتتالية (u_n) محدودة $(0 < u_n < 1)$ ومتزايدة تماما فهي متقاربة

3) أ/ تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{5}{2}$

نبيّن أنّ: $v_{n+1} = \frac{5}{2} \times v_n$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}} = \frac{3-\frac{10}{u_n+4}+2}{1-3+\frac{10}{u_n+4}} = \frac{5-\frac{10}{u_n+4}}{-2+\frac{10}{u_n+4}} = \frac{\frac{5u_n+10}{u_n+4}}{\frac{-2u_n+2}{u_n+4}} = \frac{5u_n+10}{-2u_n+2}$$

$$= \frac{5(u_n+2)}{2(-u_n+1)}$$

$$= \frac{5}{2}.\frac{u_n+2}{1-u_n} = \frac{5}{2}.v_n$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{5}{2}$

- كتابة v_n بدلالة n: نحسب أولا v_0، $v_0 = \frac{u_0+2}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{4}+2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{9}{3} = 3$

ومنه $\boxed{v_n = v_0 \times q^n}$ وعليه $\boxed{v_n = 3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^n}$

ب/ إثبات أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n+1}$

$$v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n} \Rightarrow v_n(1-u_n) = u_n+2 \Rightarrow v_n - v_n u_n = u_n + 2 \Rightarrow v_n - 2 = u_n + v_n u_n$$

$$\Rightarrow v_n - 2 = u_n(1+v_n) \Rightarrow u_n = \frac{v_n-2}{v_n+1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{v_n \overbrace{+1-3}^{-2}}{v_n+1} \Rightarrow u_n = \frac{v_n+1}{v_n+1} + \frac{-3}{v_n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = 1 - \frac{3}{v_n+1}}$$

- استنتاج النهاية $\lim_{n\to+\infty} u_n$

بما أنّ $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty$ فان $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{3}{\underbrace{v_n}_{+\infty}+1} = \boxed{1}$

التمرين الثاني

I. التحقّق من أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$

- نبيّن أن $f'(x) > 0$ على المجال $[-4;1]$: لدينا $f'(x) = \frac{49}{(x+11)^2} > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$

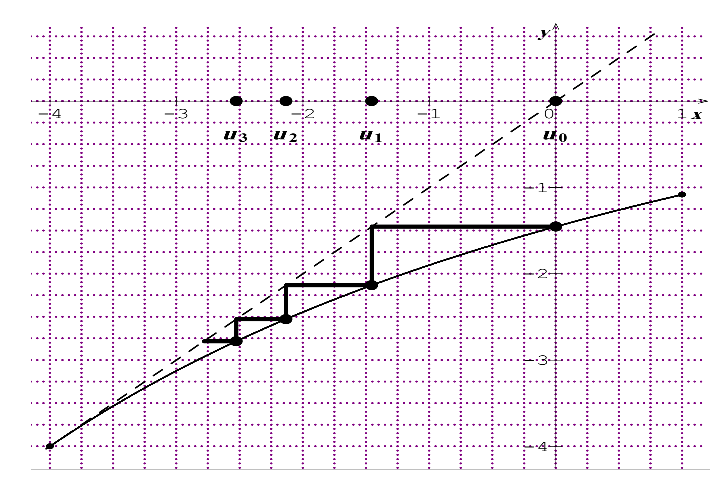
- تبيان أنه: من أجل كل $x \in [-4;1]$ فانّ $f(x) \in [-4;1]$

$x \in [-4;1]$ معناه $-4 \le x \le 1$ ومنه $f(-4) \le f(x) \le f(1)$ وبما أنّ $f(1) = \frac{-13}{12}$ و $f(-4) = -4$

فان $-4 \le f(x) \le \frac{-13}{12} \le 1$ ومنه $-4 \le f(x) \le 1$ وبالتالي $\boxed{f(x) \in [-4;1]}$

.II

1) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل



- التخمين: (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ)

2) البرهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $-4 < u_n \le 0$

نضع: $P(n) : -4 < u_n \le 0$ نتأكد من صحة $P(0)$ (أي من أجل $n = 0$)

لدينا $u_0 = 0$ أي $-4 < u_0 \le 0$ إذن الخاصية محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي $-4 < u_n \le 0$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي $-4 < u_{n+1} \le 0$

لدينا $-4 < u_n \le 0$ ومنه $u_n \in]-4;1]$ وحسب ما سبق $f(u_n) \in]-4;1]$ وبالتالي $-4 < u_{n+1} \le 0$

- تبيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما: نبين أنّ $u_{n+1} - u_n < 0$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 16}{u_n + 11} - u_n = \frac{-u_n^2 - 8u_n - 16}{u_n + 11} = \frac{-(u_n + 4)^2}{u_n + 11} < 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

3) $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

أ/ إثبات أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $q = \frac{1}{7}$

- نبين أنّ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{7}$:

أولا $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$ معناه $v_n \times u_n + 4v_n = 1$ ومنه $v_n(u_n + 4) = 1$ وبالتالي $v_n = \frac{1}{u_n + 4}$

وعليه $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 4}$ ومنه

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} + 4} - \frac{1}{u_n + 4} = \frac{1}{\frac{3u_n - 16}{u_n + 11} + 4} - \frac{1}{u_{n+1} + 4} = \frac{1}{\frac{7u_n + 28}{u_n + 11}} - \frac{1}{u_{n+1} + 4}$$

$$= \frac{u_n + 11}{7u_n + 28} - \frac{1}{u_{n+1} + 4} = \frac{u_n + 11}{7(u_n + 4)} - \frac{7}{7(u_{n+1} + 4)} = \frac{u_n + 4}{7(u_{n+1} + 4)} = \frac{1}{7}$$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $q = \frac{1}{7}$

- حساب المجموع S حيث $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \ldots + v_{2016} \times u_{2016}$

لدينا $v_n \times u_n + 4v_n = 1$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n ومنه

$$v_0 \times u_0 = 1 - 4v_0$$
$$v_1 \times u_1 = 1 - 4v_1$$
$$v_2 \times u_2 = 1 - 4v_2$$

$$v_{2016} \times u_{2016} = 1 - 4v_{2016}$$

بالجمع طرف بطرف نجد

$$v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \ldots + v_{2016} \times u_{2016} = 1 - 4v_0 + 1 - 4v_1 + \ldots + 1 - 4v_{2016}$$
$$S = (1 + 1 + \ldots + 1) - 4(v_0 + v_1 + \ldots + v_{2016})$$

لدينا $1 + 1 + \ldots + 1$ ، $(2017$ مرة) إذن $1 + 1 + \ldots + 1 = 1 \times 2017 = 2017$

و $v_0 + v_1 + \ldots + v_{2016}$ مجموع متتالية حسابية وعليه $v_0 + v_1 + \ldots + v_{2016} = \frac{2017}{2}(v_0 + v_{2016})$

نحسب v_0 و v_{2016}: $v_0 = \frac{1}{u_0 + 4} = \frac{1}{4}$ لأن $u_0 = 0$

وأيضا: $\boxed{v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{7}n}$ ومنه $v_n = v_0 + nr \Rightarrow$ $v_{2016} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7}.2016 = \frac{1153}{4}$

ومنه $v_0 + v_1 + \ldots + v_{2016} = \frac{2017}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1153}{4}\right) = \frac{2327618}{8}$

وبالتالي $S = 2017 - 4 \times \frac{2327618}{8} \Rightarrow S = 2017 - 1163809 = -1161792$ وعليه $\boxed{S = -1161792}$

التمرين الخامس

1) حساب الحدّين: u_1 و v_1

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 1 \Rightarrow u_1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4} \quad \text{و} \quad v_1 = \frac{3}{4}v_0 + 1 \Rightarrow v_1 = \frac{3}{4} \times 6 + 1 = \frac{11}{2}$$

2) أ/ كتابة $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} + 1 - \frac{3}{4}u_n - 1 = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)$ ومنه $\boxed{u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)}$

ب/ باستعمال البرهان بالتراجع برهان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما.

- نبين أنّ $u_{n+1} - u_n > 0$ ؛ نضع $P(n) : u_{n+1} - u_n > 0$

نتأكد من صحة $P(0)$ ؛ لدينا : $u_1 - u_0 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4} > 0$ محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

لدينا $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه $\frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n) > 0$ إذن $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$ لان $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)$

- نبين أنّ $v_{n+1} - v_n < 0$ ؛ نضع $P(n) : v_{n+1} - v_n < 0$

لدينا أولا $\boxed{v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{3}{4}(v_{n+1} - v_n)}$

نتأكد من صحة $P(0)$؛ لدينا : $v_1 - v_0 = \frac{11}{2} - 6 = \frac{-1}{2} < 0$ محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي $v_{n+1} - v_n < 0$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي $v_{n+2} - v_{n+1} < 0$

لدينا $v_{n+1} - v_n < 0$ ومنه $\frac{3}{4}(v_{n+1} - v_n) < 0$ إذن $v_{n+2} - v_{n+1} < 0$ لان $v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{3}{4}(v_{n+1} - v_n)$

3) $w_n = u_n - v_n$

برهان أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأوّل w_0

- نبين أن $w_{n+1} = w_n \times q$: لدينا $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$

ومنه $\boxed{w_{n+1} = \frac{3}{4}w_n}$ $\Rightarrow$ $w_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 - \frac{3}{4}v_n - 1 = \frac{3}{4}(u_n - v_n) = \frac{3}{4}w_n$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدّها الأول -5 $w_0 = u_0 - v_0 = 1 - 6 = -5$

- كتابة w_n بدلالة n: $\boxed{w_n = -5\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ $\Leftarrow$ $w_n = w_0 \times q^n$

4) تبيان أنّ المتتاليتين (u_n) و(v_n) متجاورتان

- نحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n$: وعليه $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} -5\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{0} = 0$

- بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما، و $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ فان

المتتاليتين (u_n) و(v_n) متجاورتان

التمرين السادس

I. تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

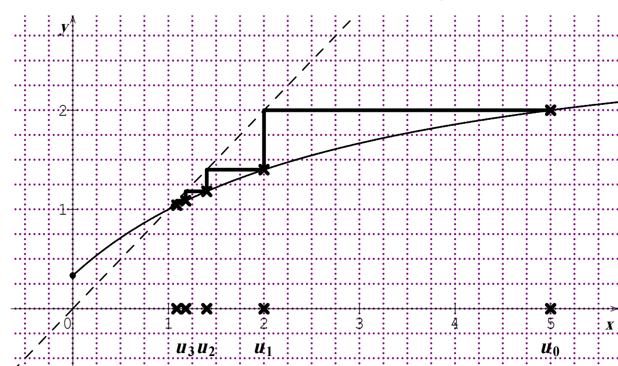
(u_n) ثابتة معناه كل الحدود متساوية وبما أنّ $u_0 = \alpha$ فان $u_0 = u_1 = \ldots u_n = u_{n+1} = \alpha$

لدينا $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$ إذن $\alpha = \pm\sqrt{1} \Leftarrow \alpha^2 = 1 \Leftarrow \alpha^2 + 3\alpha = 3\alpha + 1 \Leftarrow \alpha = \frac{3\alpha + 1}{\alpha + 3}$ ومنه

تكون (u_n) ثابتة إذا كانت $\boxed{\alpha = 1}$ أو $\boxed{\alpha = -1}$

II. نضع في كل ما يلي $\alpha = 5$

1) أ/ تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل الحدود



ب/ التخمين: (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ)

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ/ برهان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأوّل

- نبين أنّ: $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n$:

لدينا $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3} - 1}{\dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3} + 1} = \dfrac{\dfrac{2u_n - 2}{u_n + 3}}{\dfrac{4u_n + 4}{u_n + 3}} = \dfrac{2(u_n - 1)}{4(u_n + 1)} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} = \dfrac{1}{2} v_n$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ حدّها الأول v_0 حيث: $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{5 - 1}{5 + 1} = \dfrac{2}{3}$ إذن $\boxed{v_0 = \dfrac{2}{3}}$

ب/ التعبير بدلالة n عن u_n و v_n

✓ كتابة v_n بدلالة n: $v_n = v_0 \times q^n \Rightarrow \boxed{v_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$

✓ كتابة u_n بدلالة n: لدينا $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ ومنه $v_n u_n + v_n = u_n - 1$ وعليه $v_n u_n - u_n = -v_n - 1$

ومنه $(v_n - 1)u_n = -v_n - 1$ وبالتالي: $u_n = \dfrac{-v_n - 1}{v_n - 1} \dots (1)$ نعوض عبارة الحد العام لـ (v_n) في **(1)** نجد

$$u_n=\frac{-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=\frac{-\frac{2}{3\times 2^n}-1}{\frac{2}{3\times 2^n}-1}=\frac{\frac{-2-3\times 2^n}{3\times 2^n}}{\frac{2-3\times 2^n}{3\times 2^n}}=\frac{-2-3\times 2^n}{2-3\times 2^n}\Rightarrow \boxed{u_n=\frac{-2-3\times 2^n}{2-3\times 2^n}}$$

✓ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=1$ (لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$)

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_n+v_{n+1}+\ldots+v_{n+2016}$

عدد حدود المجموع S_n هو l حيث: $l=n+2016-n+1=2017$ ومنه

$$S_n=v_n+v_{n+1}+\ldots+v_{n+2016}=v_n\times\frac{q^{2017}-1}{q-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]\Rightarrow\boxed{S_n=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]}$$

- استنتاج بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n=\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+\frac{1}{u_{n+2}+1}+\ldots+\frac{1}{u_{n+2016}+1}$

لدينا

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}=\frac{u_n+1-2}{u_n+1}=1-\frac{2}{u_n+1}\Rightarrow\frac{2}{u_n+1}=1-v_n\Rightarrow\frac{1}{2}\times\frac{2}{u_n+1}=\frac{1}{2}\left(1-v_n\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}v_n$$

ومنه

$$\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}v_n$$

$$\frac{1}{u_{n+1}+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}v_{n+1}$$

$$\frac{1}{u_{n+2016}+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}v_{n+2016}$$

بالجمع طرف بطرف نجد

$$\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+\frac{1}{u_{n+2}+1}+\ldots+\frac{1}{u_{n+2016}+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}v_n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}v_{n+1}+\ldots+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}v_{n+2016}$$

$$\Rightarrow S'_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(v_n+v_{n+1}+\ldots+v_{n+2016}\right)$$

$$\Rightarrow S'_n=\frac{1}{2}\times 2017-\frac{1}{2}\times S_n$$

$$\Rightarrow S'_n=\frac{2017}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{S'_n=\frac{2017}{2}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]}$$

التمرين السابع

1) أ/ تبيان أنه: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n>0$

- نستعمل البرهان بالتراجع: نضع؛ $P(n):u_n>0$

نتأكد من صحة $P(1)$: لدينا $u_1=\frac{1}{a}>0$ محققة (لان $a\geq 2$)

نفرض صحة الخاصية $P(n):u_n>0$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1):u_{n+1}>0$

لدينا $u_n>0$ وبما أنّ $\frac{n+1}{an}>0$ فان $\frac{n+1}{an}u_n>0$ إذن $u_{n+1}>0$

الخلاصة: الخاصية $P(n):u_n>0$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

ب/ تبيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما

نبين أنّ $u_{n+1}-u_n<0$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{an}u_n-u_n=\frac{(n+1)u_n-anu_n}{an}=\frac{(n+1-an)u_n}{an}=\frac{(1-a)n+1}{an}u_n$$

لدينا

$$a\geq 2\Rightarrow -a\leq -2\Rightarrow 1-a\leq -1\Rightarrow (1-a)n\leq -n\Rightarrow (1-a)n+1\leq -n+1\leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(1-a)n+1\leq 0}$$

وَ $u_n > 0$ وبالتالي $\underbrace{\frac{(1-a)n+1}{an}}_{-}\underbrace{u_n}_{+} < 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

- استنتاج أنّها متقاربة: بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل **(** $u_n > 0$ **)** فهي متقاربة

2) أ/ برهان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{a}$

نبين أنّ: $v_{n+1} = \frac{1}{a}v_n$ لدينا: $v_{n+1} = \frac{1}{a(n+1)}u_{n+1} = \frac{1}{a(n+1)}.\frac{n+1}{an}u_n = \frac{1}{a}.\frac{1}{an}u_n = \frac{1}{a}v_n$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{a}$؛ حدّها الأول $v_1 = \frac{1}{a}.\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}$

ب/ إيجاد بدلالة n و a عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

- $v_n = v_1.q^{n-1} \Rightarrow v_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} \Rightarrow \boxed{v_n = \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}}$

- $v_n = \frac{1}{an}u_n \Rightarrow u_n = an.v_n \Rightarrow u_n = an.\frac{1}{a^{n+1}} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{n}{a^n}}$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\frac{n}{a^n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln n - n\ln a} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(\frac{\ln n}{n} - \ln a\right)} = e^{(+\infty)(-\ln a)} = e^{-\infty} = 0$$

ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

3) حساب بدلالة n و a المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \ldots + \frac{1}{n}u_n$

لدينا $v_n = \frac{1}{an}u_n$ وعليه $v_1 = \frac{1}{a}u_1$ و $v_2 = \frac{1}{2a}u_2$ و $v_3 = \frac{1}{3a}u_3$ و...الخ إذن

$$S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \ldots + \frac{1}{n}u_n = av_1 + av_2 + \ldots + av_n$$
$$= a(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)$$
$$= a.v_1 \times \frac{q^n - 1}{q-1} = a.\frac{1}{a^2} \times \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n - 1}{\frac{1}{a} - 1}$$
$$= \frac{1}{a} \times \frac{\frac{1}{a^n} - 1}{\frac{1-a}{a}} = \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{a^n} - 1\right]$$

إذن $\boxed{S_n = \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{a^n} - 1\right]}$

- تعيين قيمة a حيث $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{2016}$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-a}\left[\underbrace{\frac{1}{a^n}}_{0} - 1\right] = \frac{-1}{1-a} = \frac{1}{2016} \Rightarrow 1 - a = -2016 \Rightarrow \boxed{a = 2017}$$

التمرين الثامن

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [0;4]$ كما يلي : $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$

1) أ/ تبيان أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال I

- نحسب $f'(x)$ ، f قابلة للاشتقاق على I ولدينا $f(x) = \frac{169}{(9x+13)^2} > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على I

ب/ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ تنتمي إلى I

$$x \in I \Rightarrow x \in [0;4] \Rightarrow f(x) \in [f(0);f(4)] \Rightarrow f(x) \in \left[0;\frac{52}{49}\right] \subset [0;4]$$
$$\Rightarrow f(x) \in [0;4]$$

ملحوظة: $f(0) = 0 ; f(4) = \frac{52}{49}$

2) $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ/ البرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le 4$

- نضع: $P(n) : 0 \le u_n \le 4$

نتأكد من صحة $P(0)$: لدينا $u_0 = 4$ و $0 \le 4 \le 4$ إذن $0 \le u_0 \le 4$ محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n) : 0 \le u_n \le 4$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1) : 0 \le u_{n+1} \le 4$

لدينا $0 \le u_n \le 4$ معناه $u_n \in [0;4]$ ومنه $f(u_n) \in [0;4]$ (حسب **1**- أ) إذن $u_{n+1} \in [0;4]$

وعليه $0 \le u_{n+1} \le 4$

الخلاصة: الخاصية $P(n) : 0 \le u_n \le 4$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

ب/ استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

- ندرس إشارة الفرق: $u_{n+1} - u_n$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{13u_n}{9u_n + 13} - u_n = \dfrac{-9u_n^2}{9u_n + 13} < 0$

لأن $-9u_n^2 < 0$ و $9u_n + 13 > 0$ ، ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

- استنتاج أنها متقاربة: المتتالية (u_n) محدودة ومتناقصة تماما إذن هي متقاربة

3) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$ ؛ نستخدم البرهان بالتراجع

- نضع $P(n) : u_n \neq 0$

نتأكد من صحة $P(0)$: لدينا $u_0 = 4 \neq 1$ محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n) : u_n \neq 0$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1) : u_{n+1} \neq 0$

لبرهان أنّ ($u_n \neq 0 \Leftarrow u_{n+1} \neq 0$) نبرهن أن ($u_{n+1} = 0 \Leftarrow u_n = 0$)

لدينا $u_{n+1} = 0$ معناه $\dfrac{13u_n}{9u_n + 13} = 0$ ومنه $13u_n = 0$ وعليه $u_n = 0$

ومنه إذا كانت $P(n) : u_n \neq 0$ فان $P(n+1) : u_{n+1} \neq 0$

والخاصية $P(n) : u_n \neq 0$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

4) أ/ برهان أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0

نبين أنّ $v_{n+1} - v_n = r$

$$v_{n+1} - v_n = 2 + \frac{13}{u_{n+1}} - 2 - \frac{13}{u_n} = \frac{13}{\dfrac{13u_n}{9u_n + 13}} - \frac{13}{u_n} = \frac{9u_n + 13}{u_n} - \frac{13}{u_n} = \frac{9u_n}{u_n} = 9$$

ومنه $v_{n+1} - v_n = 9$ إذن (v_n) حسابية حدّها الأوّل $v_0 = 2 + \frac{13}{u_0} = 2 + \frac{13}{4} = \frac{21}{4}$

ب/ كتابة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 + nr \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{21}{4} + 9n}$

ج/ استنتاج أن: $u_n = \frac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_n = 2 + \frac{13}{u_n} \Rightarrow v_n - 2 = \frac{13}{u_n} \Rightarrow \frac{u_n}{13} = \frac{1}{v_n - 2} \Rightarrow u_n = \frac{13}{v_n - 2}$$

لدينا: $\Rightarrow u_n = \frac{13}{\frac{21}{4} + 9n - 2} \Rightarrow u_n = \frac{13}{\frac{36n+13}{4}}$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{52}{36n+13}}$$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{52}{36n+13} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

التمرين العاشر

.I

1) أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x+8} = +\infty$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

- نحسب $f'(x)$ ، f قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ولدينا: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+8}} > 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$2\sqrt{2}$ $\nearrow$ $+\infty$

2) تعيين احداثي نقطة تقاطع (C) مع ...لة له:

نحل المعادلة؛ $f(x) - y = 0$:

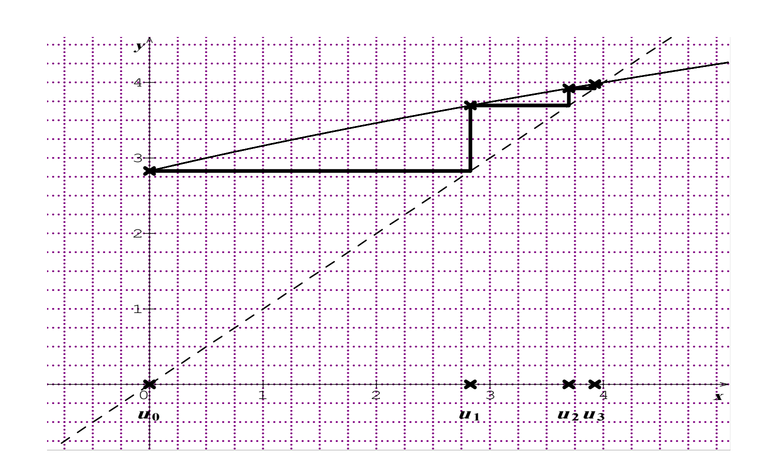
$f(x) - y =$ $\sqrt{2x+8} = x \Rightarrow \left(\sqrt{2x+8}\right)^2 = x^2$

$\Rightarrow 2x + 8 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Delta = 36 > 0$ يوجد حلين هما $\boxed{x_1 = 4}$ أو $\boxed{x_1 = -2 \notin [0;+\infty[}$ فهو مرفوض

ومنه $(C) \cap (\Delta) = \{(4;4)\}$

3) رسم (C) و (Δ)



II. $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$

1) تمثيل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل الحدود في الرسم السابق

2) التخمين: (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ)

3) أ/ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le u_n < 4$

نضع، $P(n) : 0 \le u_n < 4$

تتأكد من صحة $P(0)$: لدينا $u_0 = 0$ و $0 \le 0 < 4$ إذن $0 \le u_0 < 4$ محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n) : 0 \le u_n < 4$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1) : 0 \le u_{n+1} < 4$

لدينا $0 \le u_n < 4$ ومنه $f(0) \le f(u_n) < f(4)$ (لأن f متزايدة تماما) وبما أنّ $f(0) = 2\sqrt{2}$ و $f(4) = 4$

فان $0 \le 2\sqrt{2} \le f(u_n) < 4$ حسب خاصية التعدي ينتج $0 \le u_{n+1} < 4$

ومنه الخاصية $P(n) : 0 \le u_n < 4$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

ب/ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n): ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 8} - u_n = \frac{\left(\sqrt{2u_n + 8} - u_n\right)\left(\sqrt{2u_n + 8} + u_n\right)}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n} = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 8}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n}$$

$$= \frac{-\overbrace{(u_n + 2)}^{+}\overbrace{(u_n - 4)}^{-}}{\underbrace{\sqrt{2u_n + 8} + u_n}_{+}} > 0$$

توضيح: مما سبق $u_n \ge 0 \Rightarrow u_n + 2 \ge 2 > 0 \Rightarrow u_n + 2 > 0$ وأيضا $u_n < 4 \Rightarrow u_n - 4 < 0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ج/ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - u_n)$

ومما $4-u_{n+1}=4-\sqrt{2u_n+8}=\frac{\left(4-\sqrt{2u_n+8}\right)\left(4+\sqrt{2u_n+8}\right)}{4+\sqrt{2u_n+8}}=\frac{8-2u_n}{4+\sqrt{2u_n+8}}=\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}$

سبق $4>u_n\geq 0$ إذن

$$0\leq u_n<4\Rightarrow 8\leq 2u_n+8<16\Rightarrow 4+\sqrt{8}\leq\sqrt{2u_n+8}<8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}<\frac{1}{4+\sqrt{2u_n+8}}\leq\frac{1}{4+\sqrt{8}}$$

$$\Rightarrow \frac{2(4-u_n)}{8}<\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}\leq\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{8}}$$

$$\Rightarrow \frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}\leq\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{8}}\leq\frac{2}{4}(4-u_n)$$

$$\Rightarrow \frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$$

ومنه $4-u_{n+1}=\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$

- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $4-u_n\leq\frac{1}{2^n}(4-u_0)$

لدينا، $4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n وعليه

$$4-u_1\leq\frac{1}{2}(4-u_0)$$

$$4-u_2\leq\frac{1}{2}(4-u_1)$$

$$4-u_n\leq\frac{1}{2}(4-u_{n-1})$$

$$4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$$

بالضرب طرف لطرف نجد

$$(4-u_1)(4-u_2)\dots(4-u_n)(4-u_{n+1}) \le \frac{1}{2}(4-u_0)\frac{1}{2}(4-u_1)\dots\frac{1}{2}(4-u_{n-1})\frac{1}{2}(4-u_n)$$

$$\Rightarrow 4-u_{n+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(4-u_0)$$

$$\Rightarrow 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$$

$$\Rightarrow 4-u_n \le \frac{1}{2^n}(4-u_0)$$

د/ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ؛ لدينا $0 < 4-u_n \le \frac{1}{2^n}(4-u_0)$ ومنه $0 < 4-u_n \le 4\times\frac{1}{2^n}$ وبما أنّ

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} 4\times\frac{1}{2^n} = 0$ فان حسب نظرية الحصر

$$\lim_{n\to+\infty} 4-u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 4 - \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 4}$$

التمرين الحادي عشر

.I

1) أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x}{x+2} = 5$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

نحسب $f'(x)$ ؛ f قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ولدينا $\boxed{f'(x) = \frac{10}{(x+2)^2}}$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ وجدول تغيراتها كما يلي

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x) \ge 0$

لدينا x من المجال $[0;+\infty[$ معناه $x \ge 0$ وبما أنّ f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ فان $f(x) \ge f(0)$

($f(0) = 0$) ومنه $\boxed{f(x) \ge 0}$

.II $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n+2}$

1) أ/ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $P(n): 1 \le u_n \le 3$

نتأكد من صحة $P(0)$، لدينا $u_0 = 1$ ومنه $1 \le u_0 \le 3$ **محققة**

نفرض صحة الخاصية $P(n): 1 \le u_n \le 3$ **(فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية** $P(n+1): 1 \le u_{n+1} \le 3$

لدينا $1 \le u_n \le 3 \Rightarrow f(1) \le f(u_n) \le f(3) \Rightarrow f(1) \le u_{n+1} \le f(3)$ **وبما أن** $f(1) = \dfrac{5}{3}$ **و** $f(3) = 3$

فان $1 \le \dfrac{5}{3} \le u_{n+1} \le 3$ **إذن حسب خاصية التعدي نجد** $1 \le u_{n+1} \le 3$

الخلاصة: الخاصية $P(n): 1 \le u_n \le 3$ **محققة من أجل كل عدد طبيعي** n

ب/ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق، $u_{n+1} - u_n$ **: لدينا**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n}{u_n + 2} = \frac{\overbrace{-u_n}^{-}\overbrace{(u_n - 3)}^{-}}{\underbrace{u_n + 2}_{+}} \ge 0$$

ومنه $u_{n+1} - u_n \ge 0$ **وبالتالي المتتالية** (u_n) **متزايدة على** $\mathbb{N}$

توضيح: $1 \le u_n \le 3 \Leftarrow -2 \le u_n - 3 \le 0$ **وأيضا** $1 \le u_n \le 3 \Leftarrow -1 \le -u_n \le -3$

- **استنتاج تقارب المتتالية** (u_n)**: بما أن المتتالية** (u_n) **محدودة ومتزايدة فهي متقاربة**

2) أ/ **برهان أن** (v_n) **متتالية هندسية أساسها** $\dfrac{2}{5}$ **يطلب حساب حدّها الأول** v_0

- **نبين أنّ** $v_{n+1} = \dfrac{2}{5} \times v_n$ **، لدينا**

$$v_{n+1} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\dfrac{5u_n}{u_n + 2}} = 1 - \frac{3(u_n + 2)}{5u_n} = \frac{2u_n - 6}{5u_n} = \frac{2(u_n - 3)}{5u_n}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{2}{5} \times \frac{u_n - 3}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{3}{u_n}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{n+1} = \frac{2}{5} \times v_n}$$

ومنه (v_n) **متتالية هندسية أساسها** $\dfrac{2}{5}$

- **حساب حدّها الأول** v_0: $v_0 = 1 - \dfrac{3}{u_0} = 1 - \dfrac{3}{1} = 1 - 3 = -2 \Rightarrow \boxed{v_0 = -2}$

ب/ اكتب بدلالة n **عبارة** v_n

$$v_n = v_0 \times q^n \Rightarrow \boxed{v_n = -2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n: لدينا $v_n = 1-\frac{3}{u_n}$ ومنه $\frac{3}{u_n} = 1 - v_n$ ومنه $u_n = \frac{3}{1-v_n}$ وبالتالي

$$u_n = \frac{3}{1-v_n} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{3}{1+2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}}$$

ج/ حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{1+\underbrace{2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}_{0}} = \frac{3}{1} = 3$$ ومنه $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 3}$$

(ملحوظة $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{2}{5} < 1$)

3) كتابة بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

لدينا: $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$ ومنه $\frac{3}{u_n} = 1 - v_n$ وعليه $\frac{1}{3}\times\frac{3}{u_n} = \frac{1}{3}(1-v_n) \Leftarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{3}(1-v_n)$

$$\frac{1}{u_0} = \frac{1}{3}(1-v_0)$$

ومنه
$$\frac{1}{u_1} = \frac{1}{3}(1-v_1)$$

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{3}(1-v_n)$$

الجمع طرف بطرف نجد

$$\underbrace{\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}}_{S_n} = \frac{1}{3}(1-v_0) + \frac{1}{3}(1-v_1) + \dots + \frac{1}{3}(1-v_n)$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left[1 - v_0 + 1 - v_1 + \dots + 1 - v_n\right]$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left[1+1+\dots+1-(v_0+v_1+\dots+v_n)\right]$$

- نحسب: $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ مجموع حدود متتالية هندسية

ومنه $$v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \times \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = -2 \times \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{5} - 1} = -2 \times \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{-3}{5}}$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left[1+1+\ldots+1 - (v_0 + v_1 + \ldots + v_n)\right] \Rightarrow S_n = \frac{1}{3}\left[1\times(n+1) - \frac{10}{3}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1\right]\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{1}{3}(n+1) - \frac{10}{9}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1\right]}$$

التمرين الثاني عشر

1) تبيان أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

- نحسب $f'(x)$ ، f قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x^2 - 2x$ لأن المقام موجب تماما وعليه نحل المعادلة $2x^2 - 2x = 0$

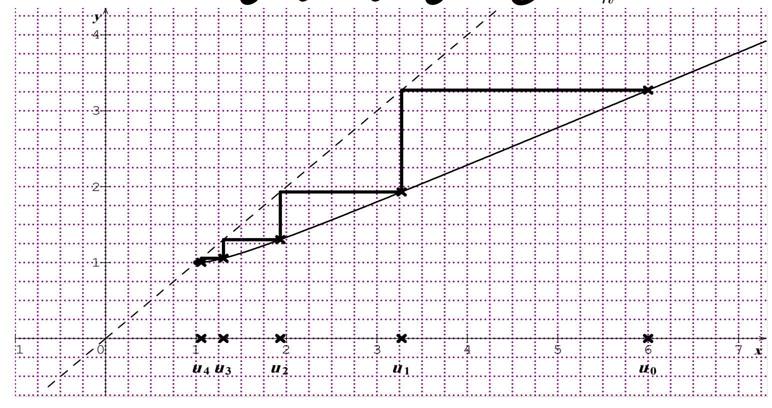
$2x^2 - 2x = 0$ ومنه $2x(x-1) = 0$ إما $2x = 0$ أي $x = 0$ (مرفوض) أو $x - 1 = 0$ أي $\boxed{x = 1}$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	0 $\qquad$ $+$

2) $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ/ تمثيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل



ب/ التخمين: المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم $(\Delta) : y = x$

ج/ برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $P(n) : 1 \le u_n \le 6$

نتأكد من صحة $P(0)$ ؛ لدينا $u_0 = 6$ ومنه $1 \le u_0 \le 6$ محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n) : 1 \le u_n \le 6$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1) : 1 \le u_{n+1} \le 6$

لدينا $f(3) \le u_{n+1} \le f(1) \Rightarrow f(1) \le f(u_n) \le f(6) \Rightarrow 1 \le u_n \le 6$ وبما أن $f(1) = 1$ و $f(6) = \frac{36}{11}$

فان $6 \le \frac{36}{11} \le u_{n+1} \le 1$ إذن حسب خاصية التعدي نجد $6 \le u_{n+1} \le 1$

الخلاصة: الخاصية $P(n) : 1 \le u_n \le 3$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

ملحوظة: أدخلنا الدالة f على المتباينة $6 \ge u_n \ge 1$ ولم نغير الاتجاه لأنها متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

د/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ ، لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{\overset{-}{-u_n}\,\overset{+}{(u_n - 1)}}{\underset{+}{2u_n - 1}} \le 0$$

ومنه $\boxed{u_{n+1} - u_n \le 0}$

وعليه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

ه/ تبرير تقارب المتتالية (u_n): بما أن المتتالية (u_n) محدودة ومتناقصة فهي متقاربة

3) نعتبر المتتاليتين: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

أ/ برهان أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدّها الأوّل

- نبين أنّ: $w_{n+1} = 2 \times w_n$، لدينا

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{u_n^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{u_n^2}{2u_n - 1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n - 1}}{\frac{u_n^2}{2u_n - 1}}\right)$$

$$\Rightarrow w_{n+1} = \ln\left(\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2}\right) \Rightarrow w_{n+1} = \ln\left(\frac{(u_n - 1)^2}{u_n^2}\right) \Rightarrow w_{n+1} = \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)^2$$

$$\Rightarrow w_{n+1} = 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) \Rightarrow \boxed{w_{n+1} = 2w_n}$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها 2

تعيين حدّها الأوّل؛ $w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right) = \ln\left(\frac{5}{6}\right) \Rightarrow \boxed{w_0 = \ln\left(\frac{5}{6}\right)}$

ب/ كتابة w_n بدلالة n

$$w_n = w_0 \times q^n \Leftarrow w_n = 2^n \times \ln\left(\frac{5}{6}\right) \Leftarrow \boxed{w_n = \ln\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$$

4) v_n بدلالة n؛ لدينا $w_n = \ln(v_n)$ ومنه $\boxed{v_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}} \Longrightarrow v_n = e^{w_n} = e^{\ln\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$

ج/ تبيان أنّ : $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$

لدينا $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ ومنه $v_n u_n = u_n - 1$ وعليه $v_n u_n - u_n = -1$ اذن $(v_n - 1)u_n = -1$ ومنه

$$u_n = \frac{-1}{v_n - 1} = \frac{1}{1 - v_n} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}}$$

- حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1} \Leftarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1-\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{\overbrace{2^n}^{+\infty}}}_{0}} = 1$

د/ حساب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = \dfrac{1}{w_0} + \dfrac{1}{w_1} + \dots + \dfrac{1}{w_n}$

معلومة

إذا كانت (w_n) متتالية هندسية أساسها q وحدّها الأول w_0 فان $\left(\dfrac{1}{w_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{q}$ وحدّها الأول $\dfrac{1}{w_0}$

لدينا في هذا التمرين (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدّها الأول $w_0 = \ln\left(\dfrac{5}{6}\right)$ فان $\left(\dfrac{1}{w_n}\right)$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$

وحدّها الأول $\dfrac{1}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$ وعليه

$$S_n=\frac{1}{w_0}+\frac{1}{w_1}+\ldots+\frac{1}{w_n}=\frac{1}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n=\frac{2}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

التمرين الثالث عشر

1) أ/ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $P(n):1+u_n>0$

نتأكد من صحة $P(0)$ ؛ لدينا $1+u_0=1+e^2-1=e^2>0$ ومنه $1+u_0>0$ محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n):1+u_n>0$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1):1+u_{n+1}>0$

لدينا: $1+u_{n+1}=1+(1+u_n)e^{-2}-1\Rightarrow 1+u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}$ ومن فرضية التراجع $1+u_n>0$

و $e^{-2}>0$ إذن $1+u_{n+1}>0$

الخلاصة: الخاصية $P(n):1+u_n>0$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

ملحوظة: $1+u_n>0$ معناه $u_n>-1$ أي أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1

ب/ تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة

- نبين أنّ $u_{n+1}-u_n\leq 0$: لدينا

$$u_{n+1}-u_n=(1+u_n)e^{-2}-1-u_n\Rightarrow u_{n+1}-u_n=(1+u_n)e^{-2}-(1+u_n)$$
$$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=(1+u_n)(e^{-2}-1)$$

وبما أنّ $e^{-2}-1\simeq-0,8<0$ و $1+u_n>0$ فان $u_{n+1}-u_n\leq 0$ وعليه المتتالية (u_n) متناقصة

- المتتالية (u_n) متقاربة لأن: (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل $(u_n>-1)$

2) نضع من أجل عدد طبيعي n : $v_n=3(1+u_n)$

أ/ إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل

- نبين أنّ؛ $\frac{v_{n+1}}{v_n}=q$

لدينا $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3(1+u_{n+1})}{3(1+u_n)} = \frac{(1+u_n)e^{-2}-1+1}{1+u_n} = \frac{(1+u_n)e^{-2}}{1+u_n} = e^{-2} = q$

ومنه (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها $q = e^{-2}$

حدّها الأول $v_0 = 3(1+u_0) = 3(1+e^2-1) = 3e^2$

ب/ كتابة v_n ثم u_n بدلالة n، ثم v_n بدلالة n

- $v_n = v_0 \times q$ إذن $\boxed{v_n = e^{2-2n}}$ $v_n = 3e^2 \times (e^{-2})^n = 3e^2 \times e^{-2n} \Rightarrow$

- u_n بدلالة n: لدينا $u_n = \frac{v_n}{3} - 1$ $v_n = 3(1+u_n) \Rightarrow \frac{v_n}{3} = 1+u_n \Rightarrow$

ومنه $\boxed{u_n = e^{2-2n} - 1}$ $u_n = \frac{3e^{2-2n}}{3} - 1 \Rightarrow$

3) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{2-2n} - 1 = e^{-\infty} - 1 = -1$ ومنه $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -1}$

4) تبيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + ... + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

هناك عدة طرق من بينها النتيجة التالية

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية <u>موجبة تماما</u> أساسها q فان $(\ln(u_n))$ متتالية حسابية أساسها $r = \ln q$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-2}$ حدّها الأول $v_0 = 3e^2$ إذن $(\ln(v_n))$ متتالية حسابية

أساسها $\boxed{r = -2}$ $r = \ln e^{-2} \Rightarrow$ وحدّها الأول $\ln v_0 = \ln 3e^2 = \ln 3 + \ln e^2 = 2 + \ln 3$

نضع $w_n = \ln(v_n)$ ومنه $w_n = \ln 3.e^{2-2n}$ وعليه $\boxed{w_n = \ln 3 + 2 - 2n}$

$$\begin{aligned}
\ln v_0 + \ln v_1 + ... + \ln v_n &= w_0 + w_1 + ... + w_n \\
&= \frac{n+1}{2}(w_0 + w_n) \\
&= \frac{n+1}{2}(2 + \ln 3 + \ln 3 + 2 - 2n) \\
&= \frac{n+1}{2}(4 + 2\ln 3 - 2n) \\
&= \frac{2(n+1)(-n+2+\ln 3)}{2} = (n+1)(-n+2+\ln 3)
\end{aligned}$$

التمرين السابع عشر

.I $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) تبيان أنّ (u_n) متتالية هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

- نبين أنّ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{\frac{1}{2}-n-1}}{e^{\frac{1}{2}-n}} = \frac{e^{\frac{1}{2}-n} \times e^{-1}}{e^{\frac{1}{2}-n}} = e^{-1}$ ومنه (u_n) متتالية هندسية، أساسها $\boxed{q = e^{-1}}$

- حساب حدّها الأول u_0 : $u_0 = e^{\frac{1}{2}-0} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \Rightarrow \boxed{u_0 = \sqrt{e}}$

2) حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = e^{-\infty} = 0$ ومنه $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

الاستنتاج: المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 0 لأن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \in \mathbb{R}$

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \sqrt{e} \times \frac{(e^{-1})^{n+1}-1}{e^{-1}-1} = \sqrt{e} \times \frac{(e^{-1})^{n+1}-1}{\frac{1}{e}-1}$$

$$\Rightarrow S_n = \sqrt{e} \times \frac{(e^{-1})^{n+1}-1}{\frac{1-e}{e}} \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{e\sqrt{e}}{1-e}\left[e^{-n-1}-1\right]}$$

II. نضع، من أجل كل عدد طبيعي n؛ $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري)

1) التعبير عن v_n بدلالة n، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n)

- $v_n = \ln(u_n) = \ln e^{\frac{1}{2}-n} = \frac{1}{2} - n$ ومنه $\boxed{v_n = \frac{1}{2} - n}$

- (v_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r = -1}$ لأن $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} - n - 1 - \frac{1}{2} + n = -1$

2) أ/ حساب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n)$

$$P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times ... \times u_n) = \ln(u_0) + \ln(u_0) + ... + \ln(u_0)$$

$$\Rightarrow P_n = v_0 + v_1 + ... + v_n \Rightarrow P_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$$

$$\Rightarrow P_n = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n\right) \Rightarrow P_n = \frac{(n+1)(1-n)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n = \frac{-n^2+1}{2}}$$

ب/ تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$ لأجل ذلك نحل المعادلة $P_n + 4n = 0$

لدينا: $P_n + 4n = \frac{-n^2+1}{2} + 4n = \frac{-n^2+8n+1}{2}$ ومنه $P_n + 4n = 0$ معناه $\frac{-n^2+8n+1}{2} = 0$

أي $-n^2 + 8n + 1 = 0$ نحسب المميز Δ ؛ $\Delta = 68 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

يوجد حلين $n_1 = 4 - \sqrt{17} \simeq -0{,}12 < 0$ و $n_2 = 4 + \sqrt{17} \simeq 8{,}12 > 0$

n	0 $\quad$ n_2 $\quad$ $+\infty$
$\frac{-n^2+8n+1}{2}$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

ومنه قيم n التي من أجلها يكون $P_n + 4n > 0$ هي $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$

التمرين التاسع عشر

1) أحسب u_1 ، v_1 و u_2 ، v_2

- $u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$ و $v_1 = \frac{u_0 + 3v_0}{4} = \frac{3 + 3\times 4}{4} = \frac{15}{4}$

- $u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{29}{4}}{2} = \frac{29}{8}$ و $v_2 = \frac{u_1 + 3v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{45}{4}}{2} = \frac{\frac{69}{4}}{2} = \frac{69}{8}$

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = v_n - u_n$ و $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

أ/ تبيان أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

- نبين أنّ: $w_{n+1} = w_n \times q$ ؛ لدينا

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4}-\frac{u_n+v_n}{2}=\frac{u_n+3v_n-2u_n-2v_n}{4}=\frac{v_n-u_n}{4}$$

$$\Rightarrow w_{n+1}=\frac{1}{4}(v_n-u_n)\Rightarrow \boxed{w_{n+1}=\frac{1}{4}\times w_n}$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{1}{4}}$ وحدّها الأول $\boxed{w_0=1}$ $w_0=v_0-u_0=4-3=1\Rightarrow$

ب/ عبر عن w_n بدلالة n، ثم

$$\boxed{w_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n}\Leftarrow w_n=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\Leftarrow w_n=w_0\times q^n$$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ لأن $-1<\frac{1}{4}<1$

3) إثبات أن المتتاليتين (u_n) و(v_n) متجاورتان

- ندرس اتجاه تغير المتتاليتان (u_n) و(v_n)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{1}{2}w_n=\underbrace{\frac{1}{2}}_{+}\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}_{+}>0$$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما....(1)

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\frac{-v_n+u_n}{4}=\frac{-(v_n-u_n)}{4}=\frac{-1}{4}w_n=-\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}_{+}<0$$

ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تماما....(2)

- ومما سبق: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ **....(3)**

من (1) و(2) و(3) نستنتج أنّ المتتاليتين (u_n) و(v_n) متجاورتان

4) بين أن المتتالية (t_n) ثابتة،

- نبين أنّ $t_{n+1}-t_n=0$: لدينا

$$t_{n+1}-t_n=\frac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3}-\frac{u_n+2v_n}{3}=\frac{\frac{u_n+v_n}{2}+2\frac{u_n+3v_n}{4}}{3}-\frac{u_n+2v_n}{3}$$

$$\Rightarrow t_{n+1}-t_n=\frac{\frac{2(u_n+2v_n)}{2}}{3}-\frac{u_n+2v_n}{3}$$

$$\Rightarrow t_{n+1}-t_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+2v_n}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{n+1}-t_n=0}$$

ومنه المتتالية (t_n) ثابتة

- حساب نهايتها: بما أنّ (t_n) ثابتة فان $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=t_0$ و $t_0=\frac{u_0+2v_0}{3}=\frac{11}{3}$ ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=\frac{11}{3}}$

5) استنتج نهاية المتتالية (u_n) و(v_n)

أولا: المتتاليتين (u_n) و(v_n) متجاورتان وهذا يعني أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=l\in\mathbb{R}$

ثانيا: $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=\frac{11}{3}\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} t_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n+2v_n}{3}=\frac{l+2l}{3}=\frac{3l}{l}=l=\frac{11}{3}$

ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{11}{3}}$

التمرين الواحد والعشرون

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+3n-1$

1) أ/ حساب u_1 ، u_2 و u_3

$$u_1=\frac{2}{3}u_0+3\times0-1=-2-1=-3$$

$$u_2=\frac{2}{3}u_1+3\times1-1=-2+2=0$$

$$u_3=\frac{2}{3}u_2+3\times2-1=0+5=5$$

- برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq3$، $P(n):u_n>0$

نتأكد من صحة $P(3)$: لدينا $u_3=5>0$ محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n):u_n>0$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1):u_{n+1}>0$

لدينا $u_n>0\Rightarrow\frac{2}{3}u_n>0\Rightarrow\frac{2}{3}u_n+3n-1>3n-1$ وبما أنّ $n\geq3$ فان $3n-1\geq8>0$

ومنه $3n-1>0$ ومنه حسب خاصية التعدي نجد $\frac{2}{3}u_n+3n-1>0$ أي أنّ $u_{n+1}>0$

الخلاصة:الخاصية $P(n):u_n>0$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n حيث؛ $n\geq 3$

طريقة ثانية: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+3n-1>\underbrace{\frac{2}{3}\times 0+3\times 3-1}_{8}>0$ إذن $u_{n+1}>0$

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$، $u_n>3n-4$ ، ثم

إذا كان: $n\geq 4$ فان $n-1\geq 3$ ومنه $u_{n-1}>0$ لما $n\geq 4$

ومنه $u_n=\frac{2}{3}u_{n-1}+3(n-1)-1=\frac{2}{3}u_{n-1}+3n-4>\underbrace{\frac{2}{3}\times 0+3n-4}_{3n-4}$ ومنه $\boxed{u_n>3n-4}$ من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$

2) استنتج نهاية المتتالية (u_n): بما أنّ $\lim_{n\to+\infty}3n-4=+\infty$ و $u_n>3n-4$ فانه حسب نظرية الحد من الأسفل نجد $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$

3) $v_n=u_n-9n+30$

أ/ برهان أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل

- نبين أنّ $v_{n+1}=v_n\times q$

$$v_{n+1}=u_{n+1}-9(n+1)+30\Rightarrow v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+3n-1-9n-9+30$$

$$\Rightarrow v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-6n+20....(1)$$

وأيضا $v_n=u_n-9n+30$ ومنه $u_n=v_n+9n-30...(2)$ نعوض (2) في (1) نجد

$$v_{n+1}=\frac{2}{3}(v_n+9n-30)-6n+20\Rightarrow v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n+6n-20-6n+20$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n}$$

ومنه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدّها الأوّل $v_0=u_0-9\times 0+30\Rightarrow \boxed{v_0=27}$

ب/ استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=9\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^n+n\right]-30$

مما سبق $u_n = v_n + 9n - 30$ وعليه لكتابة u_n بدلالة n نكتب أولا v_n بدلالة n

ومنه $v_n = v_0 \times q^n \Rightarrow \boxed{v_n = 27\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

$$u_n = 27\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9n - 30 \Rightarrow \boxed{u_n = 9\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^n + n\right] - 30}$$

4) نعتبر المتتالية الحسابية (w_n) ذات الأساس 9 وحدها الأول $w_0 = -30$

- حساب بدلالة n المجموع $L_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$

نكتب w_n بدلالة n: $\boxed{w_n = -30 + 9n} \Leftarrow w_n = w_0 + nr$

$$L_n = w_0 + w_1 + ... + w_n = \frac{n+1}{2}(w_0 + w_n) = \frac{n+1}{2}(-30 - 30 + 9n)$$

$$\Rightarrow \boxed{L_n = \frac{(n+1)(-60+9n)}{2}}$$

5) استنتاج المجموع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

لدينا $u_n = v_n + 9n - 30$ ومنه $u_n = v_n + w_n$ وعليه

$$u_0 = v_0 + w_0$$
$$u_1 = v_1 + w_1$$

$$u_n = v_n + w_n$$

بالجمع طرف بطرف نجد

$$\underbrace{u_0 + u_1 + ... + u_n}_{S_n} = v_0 + w_0 + v_1 + w_1 + ... + v_n + w_n$$

$$\Rightarrow S_n = \underbrace{(v_0 + v_1 + ... + v_n)}_{T_n} + \underbrace{(w_0 + w_1 + ... + w_n)}_{L_n}$$

$$\Rightarrow S_n = T_n + L_n$$

6) نحسب المجموع $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ (مجموع حدود متتالية هندسية)

$$T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 27 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow T_n = 81\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

ومنه $S_n = T_n + L_n \Rightarrow \boxed{S_n = 81\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{(n+1)(-60+9n)}{2}}$

التمرين الثالث والعشرون

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 6$ ومن اجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $P(n) : u_n > 4$

نتأكد من صحة $P(0)$ ؛ لدينا $u_0 = 6 > 4$ محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n) : u_n > 4$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1) : u_{n+1} > 4$

لدينا: $u_n > 4 \Rightarrow \frac{1}{4}u_n > 1 \Rightarrow \frac{1}{4}u_n + 3 > 1 + 3 \Rightarrow u_{n+1} > 4$

ومنه الخاصية $P(n) : u_n > 4$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

2) تبيان أنّ (u_n) متناقصة : نبين أنّ $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - u_n = \frac{-3}{4}u_n + 3 = \frac{-3}{4}(u_n - 4)$$

ومما سبق $u_n > 4$ إذن $u_n - 4 > 0$ ومنه $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$ وعليه (u_n) متناقصة

- **الاستنتاج: المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل ($u_n > 4$) ومتناقصة وبالتالي فهي متقاربة**

3) تبيان أنّ النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق: $l = \frac{1}{4}l + 3$ ،

(u_n) متقاربة وعليه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l \in \mathbb{R}$ ومنه نعوض u_{n+1} و u_n بـ l نجد $l = \frac{1}{4}l + 3$

- **استنتاج قيمة l: نحل المعادلة** $l = \frac{1}{4}l + 3$

$l = \frac{1}{4}l + 3 \Rightarrow l - \frac{1}{4}l = 3 \Rightarrow \frac{3}{4}l = 3 \Rightarrow \boxed{l = 4}$ **ومنه** $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$

4) $v_n = \ln(u_n - 4)$

أ/ برهان أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

- **نبين أن $v_{n+1} - v_n = r$: لدينا**

$$v_{n+1}-v_n=\ln(u_{n+1}-4)-\ln(u_n-4)=\ln\left(\frac{1}{4}u_n-1\right)-\ln(u_{n+1}-4)$$
$$\Rightarrow v_{n+1}-v_n=\ln\left[\frac{1}{4}(u_n-4)\right]-\ln(u_n-4)$$
$$\Rightarrow v_{n+1}-v_n=\ln\frac{1}{4}+\ln(u_{n+1}-4)-\ln(u_n-4)$$
$$\Rightarrow v_{n+1}-v_n=\ln\frac{1}{4}\Rightarrow v_{n+1}-v_n=-\ln 4$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r=-\ln 4}$ وحدّها الأول $v_0=\ln(u_0-4)=\ln 2$ ومنه $\boxed{v_0=\ln 2}$

ب/ التعبير عن v_n ثم u_n بدلالة n

- v_n بدلالة n: $v_n=v_0+nr$ ومنه

$$v_n=\ln 2-n\ln 4=\ln 2-(2\ln 2)n\Rightarrow \boxed{v_n=(1-2n)\ln 2}$$

- استنتاج u_n بدلالة n: لدينا $v_n=\ln(u_n-4)$ ومنه $u_n-4=e^{v_n}$ وعليه $u_n=4+e^{v_n}$ إذن

$$u_n=4+e^{(1-2n)\ln 2}=4+e^{\ln 2^{(1-2n)}}=4+2^{(1-2n)}\Rightarrow \boxed{u_n=4+2^{(1-2n)}}$$

ج/عين اصغر عدد طبيعي الذي يحقق: $u_n<4+2\times 10^{-4}$

$$u_n<4+2\times10^{-4}\Rightarrow 4+2^{(1-2n)}<4+2\times10^{-4}\Rightarrow 2^{(1-2n)}<2\times10^{-4}$$
$$\Rightarrow (1-2n)\ln 2<\ln\left[2\times10^{-4}\right]$$
$$\Rightarrow (1-2n)\ln 2<\ln 2+\ln 10^{-4}$$
$$\Rightarrow \ln 2-(2\ln 2)n<\ln 2+\ln 10^{-4}$$
$$\Rightarrow n>\frac{2\ln 10}{\ln 2}\simeq 6,6$$

أول عدد طبيعي بعد العدد الحقيقي $6,6$ هو 7 ومنه أصغر عدد طبيعي يحقق $u_n<4+2\times10^{-4}$ هو $\boxed{n_0=7}$

د/ أحسب بدلالة n المجموعين: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+...+u_n$

$$S_n=v_0+v_1+...+v_n=\frac{(n+1)(v_0+v_n)}{2}=\frac{(n+1)(\ln 2+\ln 2-(2\ln 2)n)}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{S_n=(n+1)(1-n)\ln 2}$$

مما سبق $u_n=4+e^{v_n}$ نضع $w_n=e^{v_n}$ علما أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^{\ln\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$ وحدها

الأول $w_0=e^{\ln 2}=2$ ((v_n) متتالية حسابية $\Leftarrow e^{(v_n)}$ متتالية هندسية)

ومنه $u_n=4+w_n$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n وعليه

$$u_0 = 4 + w_0$$
$$u_1 = 4 + w_1$$
$$u_n = 4 + w_n$$

بالجمع طرف بطرف نجد

$$\underbrace{u_0 + u_1 + ... + u_n}_{T_n} = 4 + w_0 + 4 + w_1 + ... + 4 + w_n$$
$$\Rightarrow T_n = (\underbrace{4 + 4 + ... + 4}_{n+1}) + (\underbrace{w_0 + w_1 + ... + w_n}_{L_n})$$
$$\Rightarrow T_n = 4(n+1) + L_n$$

نحسب المجموع L_n :

$$L_n = w_0 + w_1 + ... + w_n = w_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \Rightarrow L_n = \frac{8}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

ومنه $T_n = 4(n+1) + L_n \Rightarrow \boxed{T_n = 4(n+1) + \frac{8}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]}$

التمرين الرابع والعشرون

$u_0 = 4$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{4u_n + 1}{u_n + 4}$

1) أحسب u_1 و u_2

$u_1 = \frac{4u_0 + 1}{u_0 + 4} = \frac{17}{8}$ و $u_2 = \frac{4u_1 + 1}{u_1 + 4} = \frac{\frac{17}{2} + 1}{\frac{17}{8} + 4} = \frac{76}{49}$

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $P(n) : u_n > 1$

نتأكد من صحة $P(0)$: لدينا $u_0 = 4 > 1$ محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n) : u_n > 1$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1) : u_{n+1} > 1$

لإثبات أن $u_{n+1} > 1$ نثبت أنّ $u_{n+1} - 1 > 0$

$\frac{3(u_n-1)}{u_n+4}=\frac{4u_n+1}{u_n+4}-1=u_{n+1}-1$ ومن فرضية التراجع $u_n>1 \Leftarrow u_n-1>0$ ومنه $\frac{3(u_n-1)}{u_n+4}>0$

وبالتالي $u_{n+1}-1>0$ ومنه $u_{n+1}>1$

الخلاصة: الخاصية $P(n):u_n>1$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

لدينا: $\frac{-u_n^2+1}{u_n+4}=\frac{4u_n+1}{u_n+4}-u_n=u_{n+1}-u_n$ ومما سبق $u_n>1$ ومنه $u_n^2>1$ وعليه $-u_n^2+1<0$

وبالتالي $\frac{-u_n^2+1}{u_n+4}<0$ أي أنّ $u_{n+1}-u_n<0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

- الاستنتاج: المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأسفل ($u_n>1$) ومتناقصة تماما

4) (v_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ/ بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول

- نبيّن أنّ: $v_{n+1}=v_n\times q$ ؛ لدينا

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{4u_n+1}{u_n+4}-1}{\frac{4u_n+1}{u_n+4}+1}=\frac{\frac{3u_n-3}{u_n+4}}{\frac{5u_n+5}{u_n+4}}=\frac{3(u_n-1)}{5(u_n+1)}=\frac{3}{5}\times\underbrace{\frac{u_n-1}{u_n+1}}_{v_n}\Rightarrow v_{n+1}=\frac{3}{5}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{3}{5}$ وحدّها الأول $\frac{3}{5}=\frac{u_0-1}{u_0+1}=v_0 \Leftarrow \boxed{v_0=\frac{3}{5}}$

ب/ كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n: $v_n=v_0\times q^n=\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n \Rightarrow \boxed{v_n=\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}$

ج/ استنتج أن: $u_n=\frac{5^{n+1}+3^{n+1}}{5^{n+1}-3^{n+1}}$

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Rightarrow v_n u_n + v_n = u_n - 1 \Rightarrow v_n u_n - u_n = -v_n - 1 \Rightarrow (v_n - 1)u_n = -v_n - 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{-v_n - 1}{v_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - 1} \Rightarrow u_n = \frac{-\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - 1}{\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\frac{-3^{n+1} - 5^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{3^{n+1} - 5^{n+1}}{5^{n+1}}} \Rightarrow u_n = \frac{-(3^{n+1} + 5^{n+1})}{3^{n+1} - 5^{n+1}} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{5^{n+1} + 3^{n+1}}{5^{n+1} - 3^{n+1}}}$$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1} + 3^{n+1}}{5^{n+1} - 3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1}\left[1 + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]}{5^{n+1}\left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}} = 1$$

لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = 0$ $\left(-1 < \frac{3}{5} < 1\right)$ ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

د/ حساب كلا من : $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \ldots + v_n^2$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{5}$ و $v_0 = \frac{3}{5}$ ومنه (v_n^2) متتالية هندسية أساسها $q = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

و $v_0^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

$$S_n = v_0^2 + v_1^2 + \ldots + v_n^2 = v_0^2 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{9}{25} \times \frac{1 - \left(\frac{9}{25}\right)^{n+1}}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{9}{16}\left[1 - \left(\frac{9}{25}\right)^{n+1}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{9}{16}\left[1 - \left(\frac{9}{25}\right)^{n+1}\right]}$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times ... \times v_n = \left(\frac{3}{5}\right)^1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times ... \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1+2+...+(n+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}$$

لأن: $(1 + 2 + ... + (n+1)$ يمثل مجموع (م ح) حدها الأول 1 والأخير $n+1$ وأساسها $r = 1$

وعليه $\frac{(n+1)(n+2)}{2} = 1 + 2 + ... + (n+1)$

التمرين الثامن والعشرون

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأول u_1 وأساسها q حيث: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 ...(1) \\ u_1.u_2.u_3 = 216 ....(2) \end{cases}$

1) أ/ حساب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتاج الحد الأول

(u_n) متتالية هندسية ومنه $u_1 \times u_3 = u_2^2$ نعوض في **(2)** نجد $u_2^3 = 216$ ومنه $u_2 = \sqrt[3]{216}$ وعليه $\boxed{u_2 = 6}$

لتعيين الأساس q نكتب الحدان u_1 و u_3 بدلالة u_2

$u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{q}$ و $u_3 = u_2 \times q = 6q$ نعوض في **(1)** نجد

$$u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \Rightarrow \frac{6}{q} + 12 + 6q = 32 \Rightarrow \frac{6q^2 + 12q + 6}{q} = 32$$

$$\Rightarrow 6q^2 + 12q + 6 = 32q$$

$$\Rightarrow 6q^2 - 20q + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$\Delta = 64 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 8$ يوجد حلين $\boxed{q_1 = \frac{1}{3}}$ أو $\boxed{q_1 = 3}$

وبما أن (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما فان $\boxed{q = 3}$ حدّها الأول $u_1 = \frac{6}{3} = 2$

ب/ كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n = u_1 \times q^{n-1} \Rightarrow \boxed{u_n = 2 \times 3^{n-1}}$

ج/ أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$،

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2 \times \frac{3^n - 1}{3 - 1} \Rightarrow \boxed{S_n = 3^n - 1}$$

- تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = 728$

$$S_n = 728 \Rightarrow 3^n - 1 = 728 \Rightarrow 3^n = 729 \Rightarrow \ln 3^n = \ln 729$$

$$\Rightarrow n.\ln 3 = \ln 729 \Rightarrow n = \frac{\ln 729}{\ln 3} \Rightarrow \boxed{n = 6}$$

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بــ: $v_1 = 2$ و: $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ/ أحسب v_2 و v_3

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 5 \text{ و } v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{27}{2}$$

ب/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

- تبيان أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

نبين أن $w_{n+1} = \frac{1}{2} \times w_n$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{v_n}{u_n} + \frac{u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow w_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{v_n}{u_n} - \frac{1}{3} \Rightarrow w_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}\right] \Rightarrow \boxed{w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n}$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

- كتابة w_n بدلالة n : $w_n = w_0 \times q^{n-1} \Rightarrow \boxed{w_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

- استنتاج v_n بدلالة n

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{v_n}{u_n} = w_n + \frac{2}{3} \Rightarrow v_n = u_n w_n + \frac{2}{3} u_n$$

$$\Rightarrow v_n = 2\times 3^{n-1} \times \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\times 2\times 3^{n-1}$$

$$\Rightarrow v_n = 2\times 3^{n-1} \times \frac{1}{3}\times\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3}\times 2\times 3^{n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + 2^2\times 3^{n-2}}$$

التمرين الثاني والثلاثون

$u_0 = 4e^3$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$

1) أ/ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $P(n) : u_n > 4$

نتأكد من صحة $P(0)$: لدينا $u_0 = 4e^3 > 4$ محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n) : u_n > 4$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1) : u_{n+1} > 4$

$$u_n > 4 \Rightarrow \sqrt{u_n} > 2 \Rightarrow 2\sqrt{u_n} > 4 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} > 4}$$

الخلاصة: الخاصية $P(n) : u_n > 4$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n): ندرس اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = 2\sqrt{u_n} - u_n = \frac{\left[2\sqrt{u_n} - u_n\right]\left[2\sqrt{u_n} + u_n\right]}{2\sqrt{u_n} + u_n} = \frac{4u_n - u_n^2}{2\sqrt{u_n} + u_n} = \frac{u_n(4 - u_n)}{2\sqrt{u_n} + u_n}$$

ومما سبق $u_n > 4$ إذن $4 - u_n < 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{\overset{+}{u_n}\,\overset{-}{(4 - u_n)}}{2\sqrt{u_n} + u_n} < 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

- الاستنتاج: المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأسفل $(u_n > 4)$ ومتناقصة تماما

2) $v_n = \ln u_n - 2\ln 2$

أ/ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

- نبين أنّ؛ $v_{n+1} = v_n \times q$ ومنه

$$v_{n+1}=\ln u_{n+1}-2\ln 2 \Rightarrow v_{n+1}=\ln 2\sqrt{u_n}-2\ln 2$$
$$\Rightarrow v_{n+1}=\ln 2+\ln\sqrt{u_n}-2\ln 2$$
$$\Rightarrow v_{n+1}=\frac{1}{2}\ln u_n-\ln 2$$
$$\Rightarrow v_{n+1}=\frac{1}{2}\left[\ln u_n-2\ln 2\right]\Rightarrow v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$$

وعليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول $v_0=\ln u_0-2\ln 2=\ln 4e^3-2\ln 2=\ln 4+\ln e^3-2\ln 2=3$

ب/ أكتب v_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

$$v_n=v_0\times q^n\Rightarrow v_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow \boxed{v_n=\frac{3}{2^n}}$$

- **تبيان أن ؛** $u_n=4e^{\frac{3}{2^n}}$:

$$v_n=\ln u_n-2\ln 2\Rightarrow \ln u_n=v_n+2\ln 2$$
$$\Rightarrow u_n=e^{v_n+2\ln 2}\Rightarrow u_n=e^{2\ln 2}\times e^{v_n}$$
$$\Rightarrow u_n=e^{\ln 4}\times e^{v_n}\Rightarrow u_n=4\times e^{v_n}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_n=4\times e^{\frac{3}{2^n}}}$$

ج/ تعيين العدد الطبيعي n الذي يحقق: $v_0+v_1+\ldots+v_n=6\left(1-e^{-2019\ln 2}\right)$

ومنه $v_0+v_1+\ldots+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

$$6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=6\left(1-e^{-2019\ln 2}\right)\Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-e^{-2019\ln 2}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=e^{-2019\ln 2}$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\ln e^{-2019\ln 2}\Rightarrow (n+1)\ln\frac{1}{2}=-2019\ln 2$$
$$\Rightarrow -(n+1)\ln 2=-2019\ln 2\Rightarrow n+1=2019$$
$$\Rightarrow \boxed{n=2018}$$

- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_n^2$

(v_n^2) متتالية هندسية أساسها $q' = q^2 = \frac{1}{4}$ وحدّها الأول $v_0^2 = 3^2 \Rightarrow v_0^2 = 9$ ومنه

$$S_n = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_n^2 = v_0^2 \times \frac{1-(q')^{n+1}}{1-q'} = 9 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = 12\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = 12\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]}$$

التمرين الخامس والأربعون

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_{n+1} = \frac{7u_n + 2}{u_n + 8}$

1) عين قيم α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) ثابتة

(u_n) ثابتة معناه $u_0 = u_1 = ...u_n = u_{n+1} = \alpha$ ومنه $\alpha = \frac{7\alpha + 2}{\alpha + 8}$ إذن $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$

نحسب المميز Δ: $\Delta = 9 > 0$ يوجد حلين $\boxed{\alpha_1 = -2}$ أو $\boxed{\alpha_2 = 1}$

ومنه تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا كانت $\alpha = \{-2;1\}$

2) نفرض أنّ $u_0 = 0$

أ/ حساب u_1 ، u_2

$u_1 = \frac{7u_0 + 2}{u_0 + 8} = \frac{1}{4}$ و $u_2 = \frac{7u_1 + 2}{u_1 + 8} = \frac{5}{13}$

ب/ عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 8}$

$\frac{7u_n + 2}{u_n + 8} = \frac{au_n + 8a + b}{u_n + 8} = a + \frac{b}{u_n + 8}$ بالمطابقة نجد $a = 7$ و $8a + b = 2$ ومنه $b = 2 - 8a$

ومنه $b = -54$ وبالتالي $u_{n+1} = 7 - \frac{54}{u_n + 8}$

ج/ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $P(n) : 0 \leq u_n \leq 1$، ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

نتأكد من صحة $P(0)$: لدينا $u_0 = 0$ ومنه $0 \le u_0 \le 1$ محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n) : 0 \le u_n \le 1$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1) : 0 \le u_{n+1} \le 1$

لدينا

$$0 \le u_n \le 1 \Rightarrow 8 \le u_n + 8 \le 9 \Rightarrow \frac{1}{9} \le \frac{1}{u_n + 8} \le \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{-54}{8} \le \frac{-54}{u_n + 8} \le \frac{-54}{9}$$

$$\Rightarrow 7 - \frac{54}{8} \le 7 - \frac{54}{u_n + 8} \le 7 - \frac{54}{9}$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{1}{4} \le u_{n+1} \le 1 \Rightarrow \boxed{0 \le u_{n+1} \le 1}$$

ومنه الخاصية $P(n) : 0 \le u_n \le 1$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}$

أ/ تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

- نبين أن: $v_{n+1} = v_v \times q$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{7u_n + 2}{u_n + 8} + 2}{\frac{7u_n + 2}{u_n + 8} - 1} = \frac{\frac{9u_n + 18}{u_n + 8}}{\frac{6u_n - 6}{u_n + 8}} = \frac{9(u_n + 2)}{6(u_n - 1)} = \frac{3}{2} \times \frac{u_n + 2}{u_n - 1} \Rightarrow \boxed{v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{2}$ وحدّها الأول $\boxed{v_0 = -2}$ ⟸ $v_0 = \frac{u_0 + 2}{u_0 - 1} = -2$

ب/ عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

- v_n بدلالة n: $v_n = v_0 \times q^n \Rightarrow \boxed{v_n = -2\left(\frac{3}{2}\right)^n}$

- u_n بدلالة n:

$$v_n=\frac{u_n+2}{u_n-1}\Rightarrow v_nu_n-v_n=u_n+2\Rightarrow v_nu_n-u_n=v_n+2\Rightarrow (v_n-1)u_n=v_n+2$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{v_n+2}{v_n-1}\Rightarrow u_n=\frac{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n-1}\Rightarrow u_n=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n\left[-2+2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{\left(\frac{3}{2}\right)^n\left[-2-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}$$

ومنه $\boxed{u_n=\frac{-2+2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{-2-\left(\frac{2}{3}\right)^n}}$

- حساب نهاية (u_n): بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ فان $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2+2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{-2-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{-2}{-2}=1$

4) أحساب كلا من S_n و π_n حيث: $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ و $\pi_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$

$$S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n=v_0\times\frac{q^{n+1}-1}{q-1}=-2\times\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}\Rightarrow S_n=-4\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]$$

$$\Rightarrow S_n=4\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\pi_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n=(-2)\left(\frac{3}{2}\right)^0\times(-2)\left(\frac{3}{2}\right)^1\times\ldots\times(-2)\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \pi_n=\underbrace{(-2)\times(-2)\times\ldots\times(-2)}_{n+1}\times\left(\frac{3}{2}\right)^0\times\left(\frac{3}{2}\right)^1\times\ldots\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \pi_n=(-2)^{n+1}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{0+1+\ldots+n}\Rightarrow \boxed{\pi_n=(-2)^{n+1}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

التمرين السابع و الأربعون

1) أحسب v_0 **و** v_1

$v_0 = u_1 - u_0 = 2-1=1$ **و** $v_1 = u_2 - u_1$ **نحسب** u_2

$u_2 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0 = \frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ **ومنه** $v_1 = u_2 - u_1 = \frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}$

2) تبيان أنّ (v_n) **متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها**

- نبيّن أنّ $v_{n+1} = v_n \times q$ **:**

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_{n+1}-u_n) = \frac{1}{3}\times v_n$$

ومنه (v_n) **متتالية هندسية أساسها** $q=\frac{1}{3}$

3) أ/ أحسب بدلالة n **المجموع** S_n **حيث:**

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

ومنه $\boxed{S_n = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}$

ب/ برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n**؛** $u_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)+1$

لدينا $v_n = u_{n+1} - u_n$ **وذلك من أجل كل عدد طبيعي** n **وعليه**

$$v_0 = u_1 - u_0$$
$$v_1 = u_2 - u_1$$
$$v_2 = u_3 - u_2$$

$$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$
$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

بالجمع طرف بطرف نجد

$$\underbrace{v_0+v_1+\ldots+v_n}_{S_n}=u_{n+1}-u_0 \Rightarrow S_n=u_{n+1}-u_0 \Rightarrow u_{n+1}=S_n+u_0$$

$$\Rightarrow u_{n+1}=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]+1$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right]+1$$

ج/ تبيان أن (u_n) متقاربة: نبين أنّ $\lim_{n\to+\infty} u_n=l\in\mathbb{R}$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left(1-\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{0}\right)+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}\in\mathbb{R}$ إذن المتتالية (u_n) متقاربة

التمرين الثامن والأربعون

I. المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{5^{n+1}}{6^n}$

1) تبيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأوّل

نبين أنّ $v_{n+1}=v_n\times q$: $v_{n+1}=\frac{5^{n+1+1}}{6^{n+1}}=\frac{5^{n+1}\times 5}{6^n\times 6}=\frac{5}{6}\times\frac{5^{n+1}}{6^n}=\frac{5}{6}\times v_n \Rightarrow \boxed{v_{n+1}=\frac{5}{6}\times v_n}$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{5}{6}$ وحدّها الأوّل $v_0=\frac{5^{0+1}}{6^0}=\frac{5}{1}=5$ إذن $\boxed{v_0=5}$

2) حساب $\lim_{n\to+\infty} v_n$: $\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{5^{n+1}}{6^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5\times 5^n}{6^n}=\lim_{n\to+\infty}5\left(\frac{5}{6}\right)^n=5\times 0=0$

II. المتتالية (u_n) معرّفة بـــ $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $P(n): 1\le u_n\le 6$

نتأكد من صحة $P(0)$: لدينا $u_0=1$ ومنه $1\le u_0\le 6$ محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n): 1\le u_n\le 6$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1): 1\le u_{n+1}\le 6$

لدينا:

$$1 \leq u_n \leq 6 \Rightarrow 11 \leq 5u_n + 6 \leq 36 \Rightarrow \sqrt{11} \leq \sqrt{5u_n + 6} \leq \sqrt{36}$$
$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{11} \leq \sqrt{5u_n + 6} \leq 6$$
$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 6$$

الخلاصة: الخاصية $P(n) : 1 \leq u_n \leq 6$ **محققة من أجل كل عدد طبيعي** n

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)**: ندرس إشارة الفرق** $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6} - u_n = \frac{-u_n^2 + 5u_n + 6}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n} = \frac{-(u_n - 6)(u_n + 1)}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

ومما سبق: $u_n \leq 6 \Rightarrow u_n - 6 \leq 0$ **و** $u_n \geq 1 \Rightarrow u_n + 1 \geq 2 > 0 \Rightarrow u_n + 1 > 0$ **وعليه**

$$u_{n+1} - u_n = u_{n+1} = \frac{-\overbrace{(u_n - 6)}^{-}\overbrace{(u_n + 1)}^{+}}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n} \geq 0$$
ومنه المتتالية (u_n) **متزايدة على** $\mathbb{N}$

3) أ/ برهان أنه، من أجل كل عدد طبيعي n**،** $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$

$$6 - u_{n+1} = 6 - \sqrt{5u_n + 6} = \frac{\left(6 - \sqrt{5u_n + 6}\right)\left(6 + \sqrt{5u_n + 6}\right)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} = \frac{30 - 5u_n}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} = \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$$

ومما سبق $u_n \leq 6$

$$u_n \leq 6 \Rightarrow 5u_n + 6 \leq 36 \Rightarrow \sqrt{5u_n + 6} \leq 6 \Rightarrow 6 + \sqrt{5u_n + 6} \leq 12$$

إذن
$$\Rightarrow \frac{1}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \geq \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \leq \frac{5(6 - u_n)}{12}$$
$$\Rightarrow \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \leq \frac{5}{12}(4 - u_n) \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$$

ومنه
$$6 - u_{n+1} = \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$$

ب/ بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n**،** $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ **. استنتج** $\lim_{n \to +\infty} u_n$

لدينا، $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$ **محققة من أجل كل عدد طبيعي** n **وعليه**

$$6-u_1 \le \frac{1}{2}(6-u_0)$$
$$6-u_2 \le \frac{1}{2}(6-u_1)$$

$$6-u_n \le \frac{1}{2}(6-u_{n-1})$$
$$6-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(6-u_n)$$

بالضرب طرف لطرف نجد

$$\cancel{(6-u_1)}\,\cancel{(6-u_2)}\ldots\cancel{(6-u_n)}(6-u_{n+1}) \le \frac{5}{6}(6-u_0)\frac{5}{6}\cancel{(6-u_1)}\ldots\frac{5}{6}\cancel{(6-u_{n-1})}\frac{5}{6}\cancel{(6-u_n)}$$

$$\Rightarrow 6-u_{n+1} \le \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}(6-u_0)$$
$$\Rightarrow 6-u_{n+1} \le \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}(6-1)$$
$$\Rightarrow 6-u_{n+1} \le 5\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$$
$$\Rightarrow 6-u_n \le 5\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$$
$$\Rightarrow 6-u_n \le \frac{5^{n+1}}{6^n} \Rightarrow 6-u_n \le v_n \ldots(1)$$

ومن السؤال (1. II) : $u_n \le 6$ **ومنه** $6-u_n \ge 0\ldots(2)$

إذن من (1) و(2) نستنتج أن $0 \le 6-u_n \le v_n$

- **استنتاج** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **: لدينا** $\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} 0}_{0} \le \lim\limits_{n\to+\infty}(6-u_n) \le \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}_{0}$ **إذن حسب نظرية الحصر فان**

$$\lim_{n\to+\infty}(6-u_n)=0 \Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to+\infty} 6}_{6} - \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 6}$$

انتهى هذا العمل البسيط وأسأل الله أن ينفع به كل طالب للعلم والله ولي التوفيق

لا تنسوني بصالح دعائكم

إنما الأعمال العظيمة هي أعمال صغيرة كتب لها الاستمرار

عندما تستبدل نظرتك السلبية بأخرى ايجابية ستبدأ في الحصول على نتائج ايجابية

king